Cálculo Numérico MA-33A
Lista de Problemas #1
Análisis de errores

Problema 1. Obtener cotas para el error relativo de redondeo en las siguientes expresiones:

(a) $\sqrt{x+1}-1$ para $x \approx 0$.

(b) $\dfrac{1-\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}$ para $x \approx 0$.

(c) $\mathrm{sen}(x) - \mathrm{sen}(y)$ para $x \approx y$.

De ser posible, proponga en cada caso una forma alternativa de evaluar la expresión que evite el llamado *error de cancelación*. Obtenga las nuevas cotas de error. Suponga que las funciones involucradas están bien implementadas.

Problema 2. Se desea calcular la altura promedio de los habitantes adultos de una ciudad X. Se trabajara con el sistema de punto flotante $\mathbb{F}(10, 5, -20, +20)$ para todas las operaciones aritméticas y la altura de cada habitante se tiene como un numero entero de centímetros. La ciudad X tiene N habitantes adultos.
Obtenga una cota para el error en la altura promedio que se calcule, haciendo uso del Lema de simplificación. Indique hasta que valor de N es valido el análisis.

Problema 3. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ converge al valor $\pi^2/6$ ($= 1.64493406684823$ aprox.). De hecho, la suma de los primeros 10 términos arroja un resultado de aproximadamente 1.55. Queremos verificar numéricamente si esto es así, para lo cual hemos escrito un programa que calcula la suma desde $k = 1$ hasta $k = N$ para distintos valores de N. Nuestro programa trabaja con reales de precisión simple.

(i) A partir de $N = 5000$ nuestro programa arroja siempre la misma respuesta para la suma: SUMA $= 1.644725$
Explique lo que sucede. (Recuerde que si $|a| < \varepsilon$ entonces $1 \oplus a = 1$).
(ii) Compruebe que la discrepancia entre el valor calculado y el límite de la serie se explica por los términos que se dejaron de sumar (la cola de la serie, desde $k = 5000$ en adelante). La cola de la serie se puede acotar usando el criterio de la integral.
(iii) Obtenga en este caso particular, una cota del error relativo de redondeo para la suma de los termino desde 1 hasta N.
(iv) Cual es la cota si ahora hacemos la suma en orden inverso, desde $k = N$ hasta 1 (con lo cual estaremos sumando primero los valores mas chicos). (Respuesta: $E_R \leq ln(N)\widehat{\varepsilon}$).
Nota: Sumando los términos desde $N = 1000000$ hasta $N = 1$ el programa arroja el resultado 1.644933.

Problema 4. Sea $f(x) = (e^x - 1)/x \; (= 1 + x/2! + x^2/3! + x^3/4! + \cdots)$

(i) Verifique a mano que para $x = 10^{-8}$ se obtiene el valor aproximado

$$f(x) = 1{,}000\,000\,005\,000\,000\,020\ldots$$

(ii) El cálculo de la misma expresión, en doble precisión, arrojo el resultado:

$$f(x) = 0{,}999\,999\,993\,992\,529$$

Analice el error de redondeo correspondiente a la expresión de f para explicar lo sucedido. Suponga que la exponencial $\exp(x)$ de un número de punto flotante se obtiene númericamente con el algorítmo $EXP(x)$ que verifica la relación $EXP(x) = e^x(1+\delta)$ con $|\delta| \leq \varepsilon_m$.
(iii) En un ataque de lucidez, proponemos el método alternativo:

```
y=exp(x);
if (y ==1)
 f=1;
else
 f=(y-1)/log(y);
```

Sorprendentemente, el resultado obtenido es ahora 1.000 000 005 000 000. Explique lo sucedido a partir de un análisis de los errores. Suponga también que para el logaritmo natural calculado se tiene que $LOG(x) = log(x)(1+\delta)$ con $|\delta| \leq \varepsilon_m$.
[Esto es sorprendente pues en este método, tanto el numerador como el denominador son calculados con un gran error. Sin embargo, el cuociente resulta ser muy exacto. De alguna manera, los errores de cancelan.
Veamos que sucede:

(a) Se calcula $\hat{y} = EXP(x) = e^x(1+\delta)$. Compruebe que si $\hat{y} = 1$, el resultado correctamente redondeado es $f = 1$.
(b) Ahora, si $\hat{y} \neq 1$, verifique que:

$$\hat{f} = (\hat{y} \ominus 1) \oslash LOG(\hat{y}) = \frac{(\hat{y}-1)(1+\delta_1)}{log(\hat{y})(1+\delta_2)}(1+\delta_3)$$

(c) Definiendo $v = \hat{y} - 1$ demuestre que

$$\frac{(\hat{y}-1)}{log(\hat{y})} = 1 + \frac{v}{2} + o(v^2)$$

(d) Para terminar este análisis, justifique que

$$\frac{(\hat{y}-1)}{log(\hat{y})} - \frac{(y-1)}{log(y)} \approx \frac{\hat{y}-y}{2} \approx \frac{e^x\delta}{2} \approx \frac{\delta}{2} \approx \frac{(y-1)}{log(y)}\frac{1}{2}$$

y que por lo tanto el error relativo en $\hat{f}$ respecto de f es aproximadamente $3{,}5\varepsilon$.

Nota: El elemento crucial aquí es que la función $(y-1)/log(y)$ varía muy poco para valores de y cercanos a 1.

Problema 5. Recordemos que la sucesión $u_n = (1+1/n)^n$ converge al real e. Nos interesa calcular sus términos con buena precisión.

(i) Obtenga una cota para el error cometido en el cálculo de u_n usando dos algorítmos. En el primero la potencia n-esima se obtiene como producto de n factores iguales a $(1+\frac{1}{n})$ y en el segundo se utiliza la fórmula

$$u_n = exp(n\log(1+\frac{1}{n})).$$

(ii) Inspirándose en el problema 4, se propone una mejor alternativa para calcular $\log(1+x)$. Notese que si $x \approx 0$, en la suma $1+x$ se pierden dígitos significativos.

```
w=1+x;
if ( w==1 )
 f=x;
else
 f=x*log(w)/(w-1);
```

Haga un análisis del error, y utilice esto para el cálculo de u_n, comparando con las fórmulas de propuestas en (i). Calcule u_n para $n = 10^4, 10^8, 10^{12}, 10^{16}$.