1 Numeros Reales

1. Simplificar al máximo las siguientes expresiones, indicando paso a paso el axioma, definición o regla de los reales empleada.- Indicando además para que valores de a y b las expresiones dadas son números reales.

   (a) $(a+bc)^2-(ab+c)^2+(ac+b)^2-(a+b+c)(a+b-c)+a^2(b+c)(b-c)$

   (b) $\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-a}$

   (c) $\dfrac{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}$

   (d) $\dfrac{a+b}{a+b+\frac{1}{a-b-\frac{1}{a+b}}}$

2. Demostrar que:

$$\forall x,y\in \mathbb{R}\ x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+x^2y^{n-3}+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

3. ¿Es posible encontrar reales a y b tales que:$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$?

4. Demuestre que:

   (a) $x<y\Rightarrow x<\frac{x+y}{2}<y$

   (b) $x>0, y>0\Rightarrow \frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$

5. Probar que:

   (a) $0<x<1\leq y\Rightarrow xy+1\leq x+y$

   (b) $a^2+b^2=1\wedge x^2+y^2=1\Rightarrow ax+by\leq 1$

   (c) $a>0, b>0\Rightarrow \frac{a^3}{b^3}-\frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}+1\geq 0$

   (d) $a+b=1\Rightarrow a^4+b^4\geq 1/8$; (ind:$(a+b)^4=1$)

6. Demuestre que: $a^2+b^2+c^2=1\wedge x^2+y^2+z^2<3\Rightarrow ax+by+cz>-2$

7. Demuestre que:

$$\left.\begin{array}{rcl} ax+by+cz & = & 0\\ bx+cy+az & = & 0\\ cx+ay+bz & = & 0\\ x+y+z & \neq & 0\end{array}\right\}\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

8. Demuestre que: $\forall a,b,c\in\mathbb{R}^+$ se cumple:

(a) $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geq 9$

(b) $(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1) \geq 8$; Sabiendo que $a+b+c=1$

(c) $abc = 1 \Rightarrow a+b+c \geq 3$

9. Demuestre que:

   (a) $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}^+$

   (b) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}^+$

10. Supongase que un cuerpo A se mueve con una velocidad v_1 (y en linea recta) con respecto a un cuerpo B, y que B se mueve a su vez con una velocidad v_2 (en la misma linea recta) con respecto a un cuerpo C.- Entonces de acuerdo con la mecánica de Newton A se mueve con respecto a C con una velocidad v_1+v_2, es decir, si llamamos v a la velocidad con la cual A se mueve con respecto a C tenemos que $v = v_1 + v_2$ (ley de suma de velocidad de Newton).

    En relatividad especial (Einstein) se postula que no existen velocidades mayores que la de la luz (la cual se denota por c), sin embargo, si se toma $v_1 = v_2 = \frac{2}{3}c$ y se aplica la ley de suma de velocidades de Newton se tiene que $v = 4/3c > c$ ¡habrian velocidades mayores que c!, luego fue necesario postular una nueva ley de suma de velocidades. Ella es $v = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}$ (Ley de suma de velocidades de Einstein).

    Demuestre que en este caso v no puede ser mayor que c, es decir, lo que se pide demostrar es que:

    $$0 \leq v_1 \leq c \wedge 0 \leq v_2 \leq c \Rightarrow \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}} \leq c$$

11. Determinar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

    (a) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 + x -^3/4 > 0\}$

    (b) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 + x \geq -1/4\}$

    (c) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 5x < 14\}$

    (d) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 12x + 36 < 0\}$

    (e) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 4x + 12\}$

    (f) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 + \frac{9}{4} > -3x\}$

    (g) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 - 5 \leq 0\}$

    (h) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 49 \leq 14x\}$

    (i) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 > 10\}$

    (j) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{3x+6}{2x+6} \geq 0\}$

    (k) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 5x + 7 > 0\}$

    (l) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 - x + 3 \leq 0\}$

    (m) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \geq 0\}$

    (n) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 5 \leq 0\}$

    (o) $\{x \in \mathbb{R} / 5x^2 - 40x + 75 \geq 0\}$

    (p) $\{x \in \mathbb{R} / -2x^2 - 10x + 28 < 0\}$

    (q) $\{x \in \mathbb{R} / 16x^2 + 24x \geq 7\}$

    (r) $\{x \in \mathbb{R} / 2 - 3x - 2x^2 \geq 0\}$

    (s) $\{x \in \mathbb{R} / 18x^2 \geq 21x - 5\}$

    (t) $\{x \in \mathbb{R} / 26x - 5x^2 > 5\}$

    (u) $\{x \in \mathbb{R} / 3x^2 + 12x \geq -27\}$

    (v) $\{x \in \mathbb{R} / 5x^2 + 25x + 50 < 0\}$

12. Resolver las siguientes inecuaciones, expresando el conjunto solución correspondiente mediante uniones de intervalos.

(a) $\frac{2}{6x-5} \leq 0$
(b) $5x - 3 \geq 2x + 1$
(c) $(x-2)(x+3) \leq 0$
(d) $x^2 + 6x - 3 \geq 0$
(e) $3x^2 - x + 5 < 0$
(f) $\frac{2x+1}{8} < \frac{3x-4}{3}$
(g) $\frac{4}{x} + \frac{x-1}{5} < \frac{3}{x} + 1$
(h) $\frac{x+2}{x^2-3x} < 0$
(i) $\frac{10-7x}{6-7x} < \frac{5x-4}{5x}$
(j) $(x-3)(x+2)(5-x) \geq 0$
(k) $\frac{(x-3)(x-2)}{(5-x)} \geq 0$
(l) $2x(x^5-5) - 3x \geq 5x^2 - 2x^3 - 14x$
(m) $\frac{x^7+x}{x^2-3x+10} > 0$
(n) $\frac{x}{x^2-3x+2} - \frac{x+2}{x^2+3x+2} \leq 0$

13. Un cierto cometa pasará cerca de la tierra de modo que su distancia de esta (en kilómetros) en cada instante t del tiempo será:

$$10.000.000t^2 + 30.000.000t + 24.000.000$$

Se sabe que el cometa chocará con la tierra si en algún momento la distancia que los separa es menor o igual que 1.000.000. de kilómetros.- ¿Chocará el cometa con la tierra?.- Justifique.

14. Resolver la siguiente ecuación: $|x + \frac{1}{x}| = 6$

15. Representar en la recta real los siguientes conjuntos:

(a) $\{x \in \mathbb{R} / |x^2 - 8x - 20| > 4\}$
(b) $\{x \in \mathbb{R} / |\frac{5x+3}{x-1}| \geq 7\}$
(c) $\{x \in \mathbb{R} / 2|x| + |x-4| \leq 4|x+1|\}$
(d) $\{x \in \mathbb{R} / |x^2 - |3+2x| < 4\}$

16. Resolver las inecuaciones y las ecuaciones siguientes:

(a) $|x-3| \leq 1/2$
(b) $|7x+3| + |3-x| \geq 6|x+1|$
(c) $|x^2 - x - 6| = |x+2||x-3|$
(d) $|x-1| + |x-5| = 4$
(e) $x - |x| > 2$

17. Pruebe que:

(a) $|x - x_0| < \epsilon \wedge |x + x_0| < \epsilon \Rightarrow |x^2 - x_0^2| < \epsilon^2$

(b) $|x+y| \leq \frac{2\epsilon}{3} \wedge |x+z| < \frac{2\epsilon}{3} \wedge |y+z| \leq \frac{2\epsilon}{3} \Rightarrow |x+y+z| < \epsilon$

(c) $|ab-cd| \leq |a-c||b| + |c||b-d| \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

18. Dos puntos A y B se mueven sobre un mismo eje real de modo que su posición esta dada en cada instante t por:

$$x_A = \frac{3t-1}{t^2+1} \ ; \ x_B = \frac{t^2}{t^2+1}$$

Determinar el o los intervalos de tiempo para los cuales la distancia entre A y B es inferior a 5.-

19. Se sabe que al bombardear el núcleo de cierto átomo con partículas α la distancia promedio de estas al núcleo en el instante t viene dada por:

$$|10^{-14}t^2 - 7 \cdot 10^{-14}t + 1.2 \cdot 10^{-13}|$$

Donde las partículas parten del reposo en $t=0$.- Para que el experimento sea exitoso se debe verificar que la distancia anterior sea menor que $2 \cdot 10^{-14}$.- ¿Es exitoso el experimento?.

20. Probar que:

(a) $n! \geq n \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $n! \geq 2^n \forall n \geq 4, \ n \in \mathbb{N}$

21. Demostrar por indución las proposiciones siguientes:

(a) $(-1)^{2n-1} = -1 \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2; \forall n \in \mathbb{N}$

(c) $|x_1+x_2+\cdots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n| \forall n \in \mathbb{N}$

(d) $2^n > n \forall n \in \mathbb{N}$

(e) si $x > -1$ y $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (1+x)^n \geq 1+nx$

(f) $3n^2+9n+6$ es divisible por 6 $\forall n \in \mathbb{N}$

(g) Utilizando el resultado anterior mostrar que el producto de tres números naturales consecutivos es divisible por seis.