

## Analyse convexe et quasi-convexe ; Applications en optimisation

**Résumé :** Ce document de synthèse s'articule autour de l'analyse convexe, de l'analyse quasi-convexe et des applications en optimisation. Dans le premier domaine on aborde les thèmes de la continuité, de la différentiabilité et des critères de coïncidence pour les fonctions convexes, puis la convexification des fonctions semi-continues inférieurement. Pour l'étude des fonctions quasi-convexes deux approches sont adoptées : une approche analytique, via un sous-différentiel généralisé, et une approche géométrique, basée sur les normales aux tranches. La dernière partie est consacrée à des applications à l'intégration d'opérateurs multivoques, aux inéquations variationnelles et à des problèmes d'optimisation multi-critères en dimension finie et infinie. Parmi les nouveautés de ce travail, on trouve la notion de monotonie fortement cyclique, qui caractérise le sous-différentiel d'une fonction convexe dont la restriction à son domaine est continue, la quasi-monotonie cyclique, qui est une propriété intrinsèque du sous-différentiel d'une fonction quasi-convexe avec des applications importantes en économie mathématique, et la notion de quasi-monotonie propre, qui caractérise les opérateurs pour lesquels l'inéquation variationnelle associée a toujours des solutions sur toute sous-partie convexe et faiblement compacte de leur domaine. Notons encore une nouvelle caractérisation de la propriété de Radon-Nikodym, et une extension à la dimension infinie d'un résultat de Janin concernant l'intégration d'un opérateur maximal cycliquement sous-monotone, résultat qui généralise le théorème classique de Rockafellar pour les opérateurs maximaux cycliquement monotones.

**Mots clés :** Convexité, convexité généralisée, analyse non-lisse, sous-différentiel, intégration des opérateurs multivoques, inéquation variationnelle, optimisation multi-critère, économie mathématique.

---

## Convex and Quasiconvex Analysis ; Applications in Optimization

**Abstract:** This document is a research contribution on Convex Analysis, on Generalized Convexity and on their applications in Optimization Theory. The first part deals with several fundamental questions concerning continuity, differentiability and criteria of coincidence for the class of convex functions. Convexification processes for lower semicontinuous functions are also studied. For the class of quasiconvex functions two approaches are used: an analytic approach, in the spirit of non-smooth analysis, and a geometric one, based on the notion of normal cones to sublevel sets. The second part is devoted to applications to the integration of multivalued operators, to Variational Inequality Problems and to finite and infinite dimensional multicriteria optimization problems. Among the concepts that are introduced for the first time in this work are: the notion of strong cyclic monotonicity, which characterizes the subdifferential of a convex function with a continuous restriction on its domain; the notion of cyclic quasimonotonicity, an intrinsic property of the subdifferentials of quasiconvex functions with important applications in Mathematical Economics; and the notion of proper quasimonotonicity, which characterizes the class of operators for which the associated Minty Variational Inequality problem has at least one solution on every nonempty convex and weakly compact subset of their domains. Let us finally mention a new characterization of the Radon-Nikodym property, and an extension to infinite dimensions of a result of Janin concerning the integration of the class of maximal cyclically submonotone operators, which generalizes a classical result of Rockafellar for maximal cyclically monotone operators.

**Key words:** Convexity, generalized convexity, non-smooth analysis, subdifferential, integration of multivalued operators, variational inequalities, multicriteria optimization, mathematical economics.