



**Importante:** Visita regularmente <http://www.dim.uchile.cl/~calculo>. Ahí encontrarás las guías de ejercicios y problemas, además de información acerca de cuál será la dinámica del curso.

**SEMANA 4: DERIVADAS**

**2.3. Máximos y mínimos: la regla de Fermat**

En lo que sigue presentaremos diversas aplicaciones de la derivada al estudio de funciones. La primera corresponde a la regla de Fermat que permite caracterizar los puntos donde una función derivable alcanza su mínimo y su máximo. Para enunciar el resultado de manera precisa diremos que un punto  $\bar{x}$  es un *mínimo local* de la función  $f$  si existe  $\varepsilon > 0$  tal que

mínimo local

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon).$$

De manera análoga se define un *máximo local*.

máximo local

**Teorema 2.3.** Si  $\bar{x} \in (a, b)$  es *mínimo local* o *máximo local* de una función derivable  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $f'(\bar{x}) = 0$ .

DEMOSTRACIÓN. Si  $\bar{x}$  es *mínimo local*, para  $x$  cercano a  $\bar{x}$  se tiene  $f(x) \geq f(\bar{x})$ , con lo cual

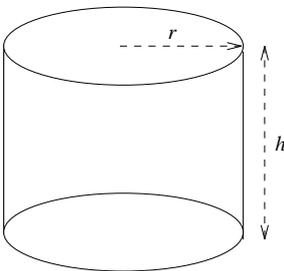
$$f'(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \leq 0 \leq \lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(\bar{x}),$$

es decir  $f'(\bar{x}) = 0$ . El caso de un *máximo local* es análogo. □

**Ejemplo 2.18.**

Deseamos diseñar un cilindro de radio  $r$  y altura  $h$  cuyo volúmen  $V = \pi r^2 h$  sea máximo, para una superficie total dada  $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ . De esta última relación se obtiene  $h = S/2\pi r - r$ , con lo cual obtenemos la expresión del volúmen exclusivamente en función del radio

$$V(r) = \pi r^2 \left( \frac{S}{2\pi r} - r \right) = \frac{Sr}{2} - \pi r^3.$$



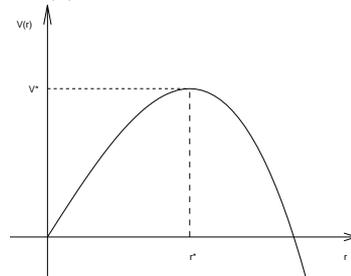
El radio óptimo se obtiene de maximizar la función  $V(r)$ , para lo cual buscamos la solución de la ecuación  $V'(r) = 0$ , vale decir

$$\frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0$$

la cual tiene dos soluciones. Como nos interesan radios positivos, obtenemos  $r^* = \sqrt{S/6\pi}$  al cual le corresponde un volúmen máximo  $V(r^*) = \sqrt{S^3/54\pi}$  y una altura óptima  $h^* = \sqrt{2S/3\pi} = 2r^*$ .

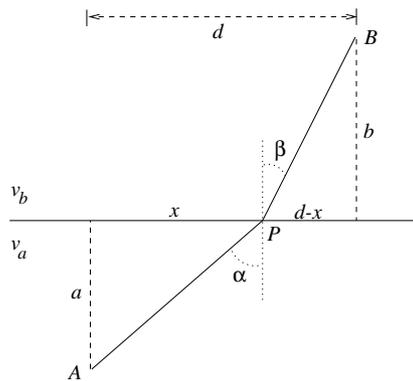
En rigor aún no podemos asegurar que la solución encontrada corresponda efectivamente a un máximo del volúmen, pues el criterio  $V'(r) = 0$  no discrimina entre un mínimo y un máximo. Más adelante veremos criterios que permiten hacer tal distinción. Por el

momento, para convencernos que la solución es un máximo, podemos hacer un gráfico aproximado de la función  $V(r)$ .



**Ejemplo 2.19.**

Un salvavidas  $A$  debe auxiliar a un bañista  $B$ . Corre desde  $A$  hasta un punto  $P$  al borde del mar, prosiguiendo a nado hasta  $B$ . Se desea determinar la posición de  $P$  que garantiza alcanzar  $B$  en el menor tiempo posible.



Suponiendo conocidas las velocidades en la tierra  $v_a$  y en el mar  $v_b$ , así como las distancias  $a, b, d$ , el tiempo se puede calcular como

$$T_{AB} = T_{AP} + T_{PB} = \frac{d_{AP}}{v_a} + \frac{d_{PB}}{v_b}$$

vale decir, en función de la variable  $x$ ,

$$T_{AB}(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_a} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_b}.$$

Esta función es continua y en consecuencia alcanza su mínimo en  $[0, d]$ . Más adelante veremos herramientas que permiten probar que el mínimo es de hecho alcanzado en un único punto  $x \in (0, d)$ , el cual queda por lo tanto caracterizado por la ecuación  $T'_{AB}(x) = 0$ , vale decir

$$\frac{x}{v_a \sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{(d-x)}{v_b \sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = 0. \tag{2.1}$$

Este modelo tiene una importante aplicación física. En efecto, el *Principio de Fermat* en óptica establece que la luz viaja siguiendo trayectorias de tiempo mínimo. En un medio uniforme la velocidad de la luz es constante de modo que la trayectoria de tiempo mínimo entre dos puntos  $A$  y  $B$  coincide con la de longitud mínima, vale decir, el segmento de recta que une  $A$  con  $B$ . Cuando  $A$  y  $B$  se encuentran en medios caracterizados por distintas velocidades de la luz  $v_a$  y  $v_b$  (aire/agua por ejemplo), la trayectoria exhibe un quiebre al pasar de un medio al otro, fenómeno conocido como *difracción*. En este contexto la relación (2.1), llamada *Ley de Snell*, se expresa en función de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  como

$$\frac{\sin \alpha}{v_a} = \frac{\sin \beta}{v_b}.$$

## 2.4. El teorema del valor medio

Al iniciar el capítulo motivamos la noción de derivada observando que ciertas funciones  $f$  (las derivables) se “parecen” (localmente) a sus aproximaciones afines  $a(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$ . Es natural conjeturar entonces que, al menos localmente, las propiedades de una función y de su aproximación coincidan. Así por ejemplo, si la aproximación es creciente, esto es si  $f'(\bar{x}) > 0$ , esperamos que  $f$  sea también creciente en una vecindad de  $\bar{x}$ . Esta conjetura no es del todo cierta y requiere ser precisada. La técnica básica para relacionar las propiedades de  $f$  con las de sus aproximaciones afines es el Teorema del Valor Medio (no confundir con el Teorema de los Valores Intermedios).

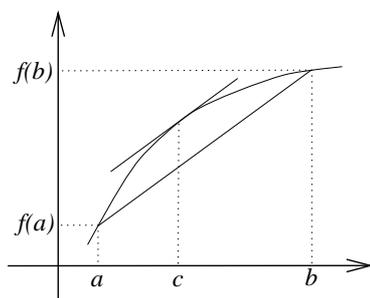
Teorema del Valor Medio, TVM

**Teorema 2.4 (TVM).** Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $(a, b)$ , con  $g(b) \neq g(a)$  y  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Entonces, existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

En particular, si  $g(x) = x$  se tiene

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



DEMOSTRACIÓN. Definiendo la función auxiliar  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$h(x) = [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)][g(b) - g(a)],$$

el resultado se reduce a probar la existencia de  $c \in (a, b)$  tal que  $h'(c) = 0$ .

Claramente  $h(a) = h(b) = 0$ . Si existe algún  $x \in (a, b)$  tal que  $h(x) > 0$ , el máximo de  $h$  se alcanza en un punto  $c \in (a, b)$  el cual satisface  $h'(c) = 0$ . Análogamente, si para algún  $x \in (a, b)$  se tiene  $h(x) < 0$ , basta tomar  $c \in (a, b)$  un punto donde  $h$  alcance su mínimo. Si ambas propiedades fallan, la función  $h$  es idénticamente nula en el intervalo  $(a, b)$ , y podemos tomar  $c \in (a, b)$  arbitrario.  $\square$

**Observación:** A posteriori se observa que en el TVM la condición  $g(b) \neq g(a)$  es superflua, pues es consecuencia de la hipótesis  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ : el TVM aplicado a  $g$  nos da  $g(b) - g(a) = g'(c)(b - a) \neq 0$  para algún  $c \in (a, b)$ .

## 2.5. Algunas aplicaciones de la derivada

En esta sección veremos la utilidad de la noción de derivada para el cálculo de límites, así como para estudio de la monotonía y convexidad de funciones.

### 2.5.1. La regla de l'Hôpital

Una primera consecuencia directa del TVM es la llamada *regla de l'Hôpital* para el cálculo de límites de la forma  $0/0$  o  $\infty/\infty$ .

regla de l'Hôpital

---

**Teorema 2.5.** Sean  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivables en  $(a, b)$ , tales que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = L$$

con  $L = 0$  o  $L = \infty$ , y  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (2.2)$$

siempre que este último límite exista.

---

DEMOSTRACIÓN. Para el caso  $L = 0$ , definiendo  $f(a) = g(a) = 0$ , el resultado es una aplicación directa del TVM y de la regla de composición para límites. El caso  $L = \infty$  es más delicado y se propone como ejercicio (difícil pero instructivo).  $\square$

Obviamente, la regla de l'Hôpital también se aplica para límites con  $x \rightarrow a^-$ ,  $x \rightarrow a$ , e incluso para límites con  $x \rightarrow \infty$ : si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$  o  $\infty$  y  $g'(x) \neq 0$  para  $x$  suficientemente grande, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-f'(1/y)/y^2}{-g'(1/y)/y^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

siempre que este último límite exista.

#### Ejemplo 2.20.

Veamos un límite conocido:  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x))/x^2 = 1/2$ . Este límite es de la forma  $0/0$ . El cociente de derivadas es  $\sin(x)/2x$  el cual converge a  $1/2$ , y por lo tanto podemos invocar la regla de l'Hôpital para concluir.

La regla de l'Hôpital nos permite ir un poco más lejos y probar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + x^2/2}{x^4} = \frac{1}{24}.$$

En efecto, aplicando reiteradamente l'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + x^2/2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{12x^2} = \frac{1}{24}.$$

**Ejemplo 2.21.**

Calculemos  $\lim_{x \rightarrow 0} [\exp(x) - 1 - x]/x^2$ . La aplicación reiterada de la regla de l'Hôpital conduce a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

**Ejemplo 2.22.**

Calculemos  $\lim_{x \rightarrow 1} [\ln(x) - 1 + x]/[\arctan(x) - \pi/4]$ . Nuevamente estamos en presencia de un límite de la forma 0/0. L'Hôpital conduce a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - 1 + x}{\arctan(x) - \pi/4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x + 1}{1/(1+x^2)} = 4.$$

**Ejemplo 2.23.**

Consideremos el límite  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + \exp(x)) \sin(1/x)$ , el cual puede escribirse como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \exp(x))}{1/\sin(1/x)}$$

que es de la forma  $\infty/\infty$ . La regla de l'Hôpital conduce a estudiar el límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)/(1 + \exp(x))}{\cos(1/x)/[x^2 \sin^2(1/x)]}.$$

Usando álgebra de límites se ve que esta última expresión tiende a 1, de modo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + \exp(x)) \sin(1/x) = 1.$$

**Ejemplo 2.24.**

(CÁLCULO DE ASÍNTOTAS) Recordemos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  posee una recta asíntota  $y = mx + n$  en  $\infty$ , si existen los límites  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x$  y  $n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$ . Observando la forma del límite que define la pendiente  $m$ , la regla de l'Hôpital nos permite deducir que si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$  existe, entonces

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x).$$

Una observación análoga vale para el comportamiento asintótico de  $f$  en  $-\infty$ .

Consideremos por ejemplo la función  $f(x) = \ln(1 + \exp \sqrt{1 + ax^2})$  donde  $a > 0$ . Para determinar si existe asíntota en  $\infty$  calculamos

$$f'(x) = \frac{\exp \sqrt{1 + ax^2}}{1 + \exp \sqrt{1 + ax^2}} \frac{ax}{\sqrt{1 + ax^2}}.$$

Dado que  $\sqrt{1 + ax^2} \rightarrow \infty$  y  $\lim_{u \rightarrow \infty} \exp(u)/[1 + \exp(u)] = 1$ , obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp \sqrt{1 + ax^2}}{1 + \exp \sqrt{1 + ax^2}} = 1.$$

Por otra parte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{\sqrt{1+ax^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{1/x^2+a}} = \sqrt{a}$$

de modo tal que

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \sqrt{a}.$$

Como ejercicio, demuestre que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = 0$ , de donde se sigue que  $f$  tiene una recta asíntota en  $\infty$  descrita por la ecuación  $y = \sqrt{a}x$ .

### 2.5.2. Derivadas y monotonía

Para una función creciente, los cocientes  $(f(x) - f(\bar{x})) / (x - \bar{x})$  son no-negativos y por lo tanto, si  $f$  es derivable, se sigue que  $f'(\bar{x}) \geq 0$ . De igual forma, si  $f$  es decreciente se tiene  $f'(\bar{x}) \leq 0$ . El TVM permite probar las implicancias recíprocas.

---

**Teorema 2.6.** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Si  $f'(x) \geq 0$  (resp.  $\leq 0$ ) para todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f$  es creciente (resp. decreciente) en  $[a, b]$ . Si la desigualdad es estricta, la monotonía es igualmente estricta.*

---

DEMOSTRACIÓN. Basta notar que si  $x, y \in [a, b]$  con  $y > x$ , el TVM implica que  $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$  (resp  $\leq, >, <$ ) para algún  $c \in (x, y)$ .  $\square$

#### Ejemplo 2.25.

Consideremos la función  $f(x) = x \exp(-x)$  definida y diferenciable en todo  $\mathbb{R}$ . Dado que  $f'(x) = (1 - x) \exp(-x)$ , observamos que  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (-\infty, 1)$  mientras que  $f'(x) < 0$  para  $x \in (1, \infty)$ . En consecuencia  $f$  es estrictamente creciente en el intervalo  $(-\infty, 1]$  y estrictamente decreciente en  $[1, \infty)$ . En particular obtenemos que la función  $f$  alcanza su máximo en el punto  $\bar{x} = 1$ , tomando el valor  $f(1) = 1/e$ , vale decir  $x \exp(-x) \leq 1/e$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Los cálculos anteriores se resumen convenientemente en la siguiente tabla de crecimiento:

|         |           |     |          |
|---------|-----------|-----|----------|
|         | $-\infty$ | $1$ | $\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | -   |          |
| $f(x)$  | ↗         | ↘   |          |

#### Ejemplo 2.26.

Estudie el crecimiento de  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$ . La derivada es  $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x - 2)(x + 1)$ . Por lo tanto la tabla de crecimiento de  $f$  viene dada por

|         |           |      |     |          |
|---------|-----------|------|-----|----------|
|         | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | -    | +   |          |
| $f(x)$  | ↗         | ↘    | ↗   |          |

y en consecuencia  $f$  es creciente en  $(-\infty, -1]$ , decreciente en  $[-1, 2]$ , y nuevamente creciente en  $[2, \infty)$ . El punto  $\bar{x} = -1$  corresponde a un máximo local, mientras que  $\underline{x} = 2$  es un mínimo local.

### Ejemplo 2.27.

Consideremos nuevamente el Ejemplo 2.18 y probemos que el valor  $r^* = \sqrt{S/6\pi}$  corresponde efectivamente al radio del cilindro de superficie  $S$  que tiene volumen máximo. La función volumen viene dada por  $V(r) = Sr/2 - \pi r^3$ , cuya derivada es  $V'(r) = S/2 - 3\pi r^2$ . De este modo se tiene  $V'(r) > 0$  para  $r \in (0, r^*)$  y  $V'(r) < 0$  para  $r > r^*$ . Por lo tanto la función  $V$  es creciente en  $[0, r^*]$  y decreciente en  $[r^*, \infty)$ , de modo tal que  $r^*$  entrega efectivamente un máximo para  $V(r)$ .

### Ejemplo 2.28.

Reconsideremos ahora el problema de trayectoria de tiempo mínimo del Ejemplo 2.19. Vimos que la función  $T_{AB}(x)$  es derivable en todo punto  $x \in (0, d)$ , con

$$T'_{AB}(x) = \frac{x}{v_a \sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{(d-x)}{v_b \sqrt{(d-x)^2 + b^2}}.$$

Dado que  $T'_{AB}(0) < 0$  y  $T'_{AB}(d) > 0$ , el TVI asegura la existencia de algún  $\bar{x} \in (0, d)$  tal que  $T'_{AB}(\bar{x}) = 0$ . Por otra parte la derivada de la función  $T'_{AB}$  está dada por

$$T''_{AB}(x) = \frac{a^2}{v_a [x^2 + a^2]^{3/2}} + \frac{b^2}{v_b [(d-x)^2 + b^2]^{3/2}}$$

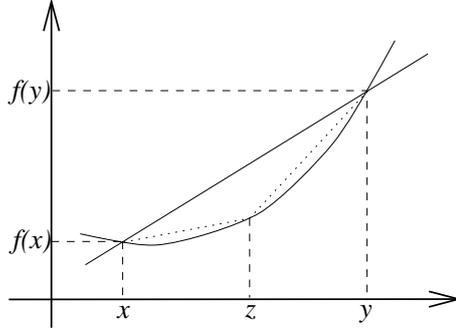
la cual es positiva, de modo que  $T'_{AB}$  es estrictamente creciente en  $(0, d)$ . Como  $T'_{AB}(\bar{x}) = 0$ , se sigue que  $T'_{AB}(x)$  es negativa en  $(0, \bar{x})$  y positiva en  $(\bar{x}, d)$ , y por consiguiente  $T_{AB}$  es decreciente en  $(0, \bar{x})$  y creciente en  $(\bar{x}, d)$ . Esto prueba que  $\bar{x} \in (0, d)$  es el único mínimo de la función  $T_{AB}$ .

### 2.5.3. Derivadas y convexidad

Una propiedad geométrica de las funciones, que permite hacerse una idea más precisa de la forma de su gráfico, es la convexidad o concavidad. Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice *convexa* si las rectas secantes al gráfico de la función quedan por encima del gráfico, vale decir

$$f(z) \leq f(x) + \left[ \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right] (z - x) \quad \forall x < z < y. \quad (2.3)$$

convexa



La desigualdad (2.3) se puede escribir en la forma

$$[f(z) - f(x)](y - x) \leq \{[f(y) - f(z)] + [f(z) - f(x)]\} (z - x)$$

o también  $[f(z) - f(x)](y - z) \leq [f(y) - f(z)](z - x)$ , de modo que (2.3) equivale a

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \quad (2.4)$$

mostrando que la convexidad corresponde a la monotonía de las pendientes de las rectas secantes al gráfico de  $f$ . Esto conduce a la siguiente caracterización.

**Teorema 2.7.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Entonces  $f$  es convexa en  $[a, b]$  ssi  $f'$  es creciente en  $(a, b)$ .

DEMOSTRACIÓN. Si  $f$  es convexa y  $x < y$ , tomando  $z \in (x, y)$  y  $v > y$  se obtiene

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \leq \frac{f(v) - f(y)}{v - y}.$$

Haciendo  $z \rightarrow x^+$  y  $v \rightarrow y^+$  se sigue  $f'(x) \leq f'(y)$  de modo que  $f'$  es creciente. Recíprocamente, si  $f'$  es creciente y  $x < z < y$ , la desigualdad de convexidad (2.4) resulta de usar el TVM el cual permite encontrar  $c \in (x, z)$  y  $d \in (z, y)$  tales que

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(c) \leq f'(d) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

□

Análogamente,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice *cóncava* si las rectas secantes quedan por debajo del gráfico de la función. Esto equivale a la convexidad de  $-f$  y por lo tanto, en el caso diferenciable, a que  $f'$  sea decreciente.

cóncava

**Ejemplo 2.29.**

La función  $f(x) = x^2$  tiene derivada  $f'(x) = 2x$  la cual es creciente, y por lo tanto  $x^2$  es convexa. Del mismo modo para  $f(x) = \exp(x)$  se tiene que  $f'(x) = \exp(x)$  es creciente y en consecuencia  $\exp(x)$  es convexa. Para la función  $f(x) = \ln(x)$  en cambio, se tiene que  $f'(x) = 1/x$  la cual es decreciente en  $(0, \infty)$  y por lo tanto  $\ln$  es cóncava. Finalmente, para  $f(x) = x^3$  se tiene  $f'(x) = 3x^2$  la cual es decreciente en  $(-\infty, 0]$  y creciente en  $[0, \infty)$ , de modo que  $x^3$  es cóncava en  $(-\infty, 0]$  y convexa en  $[0, \infty)$ .

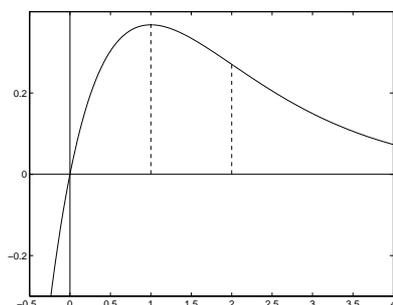
A diferencia de los ejemplos anteriores, en muchos casos la monotonía de  $f'(x)$  no es evidente. Sin embargo, si la función  $f'(x)$  es ella misma diferenciable, podemos estudiar su monotonía a través de los signos de su derivada, que denotamos  $f''(x)$ .

**Ejemplo 2.30.**

Consideremos la función  $f(x) = x \exp(-x)$ . Ya vimos en el Ejemplo 2.25 que  $f'(x) = (1 - x) \exp(-x)$  con lo cual obtuvimos que  $f$  es creciente en  $(-\infty, 1]$  y decreciente en  $[1, \infty)$ . Para estudiar la convexidad de  $f$  debemos determinar el crecimiento de la función  $g(x) = f'(x)$ . Como esta última es diferenciable bastará estudiar los signos de su derivada  $g'(x) = f''(x) = (x - 2) \exp(-x)$ . Claramente  $g'(x) > 0$  ssi  $x > 2$ , de donde  $g = f'$  es creciente en  $[2, \infty)$  y decreciente en  $(-\infty, 2]$ . Concluimos que  $f$  es cóncava en  $(-\infty, 2]$  y convexa en  $[2, \infty)$ . Los cálculos anteriores se resumen convenientemente en la tabla de convexidad:

|          |           |     |          |
|----------|-----------|-----|----------|
|          | $-\infty$ | $2$ | $\infty$ |
| $f''(x)$ | -         | +   |          |
| $f'(x)$  | ↘         | ↗   |          |
| $f(x)$   | ∩         | ∪   |          |

Un gráfico aproximado de la función es el siguiente:



## 2.6. Derivadas de orden superior

En la sección anterior vimos la relación entre  $f'$  y la monotonía de  $f$ , así como entre  $f''$  y la convexidad/concavidad de  $f$ . El significado geométrico de las derivadas de orden superior es menos evidente, pero ellas son útiles para construir aproximaciones polinomiales de la función, más precisas que la aproximación afín dada por la derivada primera. Las derivadas de orden superior se definen inductivamente por

$$f^{[k]}(\bar{x}) := (f^{[k-1]})'(\bar{x}).$$

$f^{[k]}(\bar{x})$

con la convención  $f^{[0]}(x) = f(x)$ . En particular  $f^{[1]}(\bar{x}) = f'(\bar{x})$ ,  $f^{[2]}(\bar{x}) = f''(\bar{x})$ , ... Notar que para que  $f$  tenga una derivada de orden  $k$  en  $\bar{x}$ ,  $f^{[k-1]}(x)$  debe existir al menos en un intervalo  $(\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$  y ser derivable en  $\bar{x}$ .

Si  $f$  admite una derivada de orden  $k$  en todo punto de un intervalo  $(a, b)$ , entonces  $f^{[k-1]}$  (e inductivamente todas las derivadas de orden inferior a  $k$ ) son continuas en  $(a, b)$ . Diremos que  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^k(a, b)$  si es  $k$  veces derivable en todo punto del intervalo

clase  $C^k(a, b)$

$(a, b)$ , y la función  $f^{[k]} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua. Si esto es cierto para todo  $k$ , diremos que  $f$  es de clase  $C^\infty$ .

clase  $C^\infty$

**Ejemplo 2.31.**

Las funciones  $f(x) = \sin(x)$  y  $g(x) = \cos(x)$  poseen derivadas de todos los órdenes y son de clase  $C^\infty$ . En efecto, sabemos que  $f'(\bar{x}) = \cos(\bar{x})$  y  $g'(\bar{x}) = -\sin(\bar{x})$ . De manera inductiva se encuentra que

$$\sin^{[k]}(\bar{x}) = \begin{cases} \sin(\bar{x}) & \text{si } k = 0 \pmod{4}, \\ \cos(\bar{x}) & \text{si } k = 1 \pmod{4}, \\ -\sin(\bar{x}) & \text{si } k = 2 \pmod{4}, \\ -\cos(\bar{x}) & \text{si } k = 3 \pmod{4}, \end{cases}$$

y análogamente para las derivadas sucesivas de  $\cos$ .

**2.7. Desarrollos limitados**

Diremos que  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  posee un desarrollo limitado de orden  $k$  en torno al punto  $\bar{x} \in (a, b)$  si existen constantes  $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  tales que

desarrollo limitado

$$f(x) = a_0 + a_1(x - \bar{x}) + a_2(x - \bar{x})^2 + \dots + a_k(x - \bar{x})^k + o((x - \bar{x})^k).$$

con  $\lim_{u \rightarrow 0} o(u^k)/u^k = 0$ . Usando el cambio de variables  $h = x - \bar{x}$ , la propiedad se escribe de manera equivalente

$$f(\bar{x} + h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_kh^k + o(h^k).$$

Un desarrollo limitado de orden  $k$  es por lo tanto una aproximación polinomial, cuyo error de aproximación es pequeño en comparación con  $(x - \bar{x})^k$ . La herramienta básica para obtener tales aproximaciones son los desarrollos de Taylor descritos a continuación.

---

**Teorema 2.8.** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k$ -veces derivable en  $\bar{x} \in (a, b)$ , y sea

$$T_f^k(h) := f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{f''(\bar{x})}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{k!}h^k$$

su desarrollo de Taylor de orden  $k$  en torno a  $\bar{x}$ . Entonces

desarrollo de Taylor

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + o((x - \bar{x})^k)$$

con  $\lim_{h \rightarrow 0} o(h^k)/h^k = 0$ .

---

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\epsilon > 0$  tal que  $f$  es  $(k - 1)$  veces derivable en  $I_\epsilon = (\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$ , y sea  $\tilde{f}(x) := f(x) - T_f^k(x - \bar{x})$ . Notando que  $\tilde{f}(\bar{x}) = \tilde{f}'(\bar{x}) = \dots = \tilde{f}^{[k-1]}(\bar{x}) = 0$ , al igual que para la función  $g(x) := (x - \bar{x})^k$ , podemos aplicar el TVM inductivamente  $(k - 1)$  veces y

deducir que para todo  $x \in I_\epsilon, x \neq \bar{x}$  existe  $\xi = \xi(x)$  (en  $(\bar{x}, x)$  o  $(x, \bar{x})$  según corresponda) tal que

$$\frac{\tilde{f}(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}^{[k-1]}(\xi)}{g^{[k-1]}(\xi)} = \frac{1}{k!} \left[ \frac{f^{[k-1]}(\xi) - f^{[k-1]}(\bar{x})}{\xi - \bar{x}} - f^{[k]}(\bar{x}) \right].$$

Dado que  $\xi = \xi(x) \rightarrow \bar{x}$ , la regla de composición de límites implica que el lado derecho tiende a 0, lo que permite concluir.  $\square$

**Observación:** La recíproca es en general falsa: el hecho que una función admita un desarrollo limitado de orden  $k$  en  $\bar{x}$  no implica la existencia de  $f^{[k]}(\bar{x})$ . Considerar por ejemplo la función  $f(x) = x \sin x^2$  si  $x \in \mathbb{Q}$  y  $f(x) = 0$  si no, la cual admite el desarrollo limitado  $f(x) = x^3 + o(x^3)$  pero que solamente es derivable en  $\bar{x} = 0$  y por lo tanto no tiene derivada segunda ni menos tercera en dicho punto.

**Ejemplo 2.32.**

La función  $f(x) = \exp(x)$  es de clase  $C^\infty$  con  $f^{[k]}(0) = 1$  para todo  $k$ . Así, su desarrollo limitado de orden  $k$  en torno a 0 viene dado por

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + o(x^k).$$

**Ejemplo 2.33.**

La función  $f(x) = -\ln(1-x)$  es derivable en  $(-\infty, 1)$  con  $f'(x) = 1/(1-x)$ . Se sigue que  $f''(x) = 1/(1-x)^2, f'''(x) = 2/(1-x)^3, \dots, f^{[k]}(x) = (k-1)/(1-x)^k$ . En consecuencia  $f$  es de clase  $C^\infty$  en  $(-\infty, 1)$ , y su desarrollo limitado de orden  $k$  en torno a 0 es

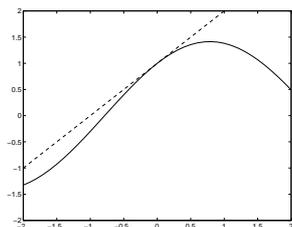
$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^k}{k} + o(x^k).$$

**Ejemplo 2.34.**

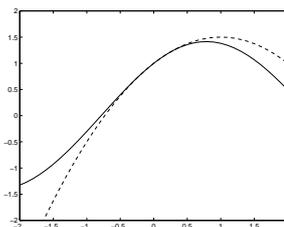
Sea  $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ . Los desarrollos de Taylor de orden 1, 2 y 3 en torno a 0 están dados por

$$\begin{aligned} T_f^1(x) &= 1 + x \\ T_f^2(x) &= 1 + x - x^2/2 \\ T_f^3(x) &= 1 + x - x^2/2 - x^3/6 \end{aligned}$$

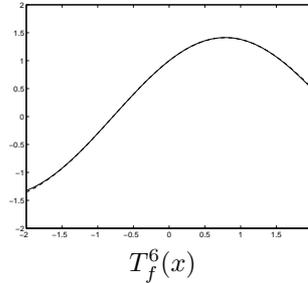
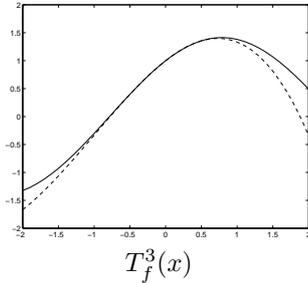
Los siguientes gráficos ilustran como los desarrollos de Taylor (línea discontinua) se aproximan cada vez mejor a la función original  $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ .



$T_f^1(x)$



$T_f^2(x)$



Los ejemplos que siguen ilustran como se pueden combinar desarrollos limitados conocidos para obtener desarrollos de funciones más complejas.

**Ejemplo 2.35.**

Los desarrollos limitados se pueden sumar y multiplicar, operando básicamente como si se tratara de polinomios. Consideremos por ejemplo los desarrollos limitados

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - x^3/6 + o(x^4) \\ \exp(-x) &= 1 - x + x^2/2 - x^3/6 + o(x^3). \end{aligned}$$

Usando el hecho que un término  $o(x^m)$  es también  $o(x^k)$  si  $k \leq m$ , se obtiene

$$\exp(-x) + \sin(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Asimismo, el hecho que  $x^m = o(x^k)$  si  $m > k$  y también  $f(x)o(x^k) = o(x^{m+k})$  siempre que  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)/x^m| < \infty$  (ejercicio), se obtiene

$$\begin{aligned} \sin(x) \exp(-x) &= \left[ x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right] \cdot \left[ 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right] \\ &= x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^6}{36} + o(x^4) \exp(-x) + o(x^3) \sin(x) \\ &= x - x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4). \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.36.**

Los desarrollos limitados también se pueden componer. Por ejemplo, para obtener un desarrollo limitado de orden 2 de  $f(x) = \ln[1 + \exp(x)]$  en torno a  $\bar{x} = 0$ , podemos usar el desarrollo  $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$  que permite escribir

$$f(x) = \ln[2 + x + x^2/2 + o(x^2)].$$

Por otro lado, dado que

$$\ln[2 + z] = \ln 2 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + o(z^2)$$

reemplazando  $z = x + x^2/2 + o(x^2)$  se obtiene

$$f(x) = \ln 2 + \frac{[x + x^2/2 + o(x^2)]}{2} - \frac{[x + x^2/2 + o(x^2)]^2}{8} + o([x + x^2/2 + o(x^2)]^2).$$

Finalmente, para obtener el desarrollo buscado es suficiente identificar los coeficientes de las potencias de  $x$  de grado menor o igual que 2, pues todos los términos restantes son de orden  $o(x^2)$ . Con esto se llega a

$$\ln[1 + \exp(x)] = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Obviamente este mismo resultado se obtiene de calcular el desarrollo de Taylor de orden 2, pues  $f(0) = \ln 2$ ,  $f'(0) = 1/2$  y  $f''(0) = 1/4$ .

### Ejemplo 2.37.

Los desarrollos limitados también son útiles para calcular límites de la forma  $0/0$ . En rigor, se trata de otra forma de la regla de l'Hôpital. Ilustremos esto a través de un ejemplo sencillo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \cos(x) - \sin(x)}{\ln(1 + 2x^2)}.$$

La primera potencia (no nula) en el desarrollo limitado del denominador es  $x^2$ , más exactamente,  $\ln(1 + 2x^2) = 2x^2 + o(x^2)$ . Haciendo un desarrollo de orden 2 del numerador se obtiene  $\exp(x) - \cos(x) - \sin(x) = x^2 + o(x^2)$ , de modo que el límite buscado es

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \cos(x) - \sin(x)}{\ln(1 + 2x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + o(x^2)/x^2}{2 + o(x^2)/x^2} = \frac{1}{2},$$

resultado que se obtiene también fácilmente usando la regla de l'Hôpital (ejercicio).

## 2.8. Caracterización de puntos críticos

Otra aplicación importante de las derivadas de orden superior es que permiten discriminar si un punto crítico ( $f'(\bar{x}) = 0$ ) es mínimo local, máximo local, o punto de inflexión (punto de cambio de convexidad de la función). El resultado preciso es el siguiente.

punto crítico  
mínimo local  
máximo local  
punto de inflexión

**Proposición 2.2.** *Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k$  veces derivable en  $\bar{x} \in (a, b)$ , con  $f'(\bar{x}) = \dots = f^{[k-1]}(\bar{x}) = 0$  y  $f^{[k]}(\bar{x}) \neq 0$ ,  $k \geq 2$ . Entonces hay 3 casos posibles:*

- (a) *Si  $k$  es par y  $f^{[k]}(\bar{x}) > 0$ ,  $\bar{x}$  es un mínimo local.*
- (b) *Si  $k$  es par y  $f^{[k]}(\bar{x}) < 0$ ,  $\bar{x}$  es un máximo local.*
- (c) *Si  $k$  es impar,  $\bar{x}$  es un punto de inflexión.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos primero el caso en que  $k$  es par. Haciendo un desarrollo limitado de orden  $k$  para  $f$  en torno a  $\bar{x}$  se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{(x - \bar{x})^k} = \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{k!}.$$

Se sigue que existe un intervalo  $I$  en torno a  $\bar{x}$  en el cual  $(f(x) - f(\bar{x})) / (x - \bar{x})^k$  tiene igual signo que  $f^{[k]}(\bar{x})$ . Como  $k$  es par se deduce que para todo  $x \in I$ ,  $x \neq \bar{x}$ , se tiene  $f(x) > f(\bar{x})$  en el caso (a) y  $f(x) < f(\bar{x})$  en el caso (b).

Si  $k$  es impar, un desarrollo de orden  $(k - 2)$  de  $g = f''$  conduce a

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f''(x)}{(x - \bar{x})^{k-2}} = \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{(k - 2)!}.$$

Como antes, para  $x$  cercano a  $\bar{x}$  el signo de  $f''(x)/(x - \bar{x})^{k-2}$  es igual al de  $f^{[k]}(\bar{x})$  y, dado que  $k - 2$  es impar, se deduce que  $f''(x)$  cambia de signo entre  $x < \bar{x}$  y  $x > \bar{x}$ , de modo que la convexidad de  $f$  cambia al cruzar  $\bar{x}$ .  $\square$

## 2.9. Fórmula de Taylor

La siguiente generalización del TVM permite calcular el error de aproximación que se comete al reemplazar una función por su desarrollo de Taylor.

---

**Teorema 2.9.** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(k + 1)$ -veces derivable en todo punto del intervalo  $(a, b)$ . Sea  $T_f^k(\cdot)$  el polinomio de Taylor de orden  $k$  en  $\bar{x} \in (a, b)$ . Entonces, para todo  $x > \bar{x}$  (resp.  $x < \bar{x}$ ) existe  $\xi \in (\bar{x}, x)$  (resp.  $\xi \in (x, \bar{x})$ ) tal que

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k + 1)!} (x - \bar{x})^{k+1}. \quad (2.5)$$


---

DEMOSTRACIÓN. Análoga al Teorema 2.8: aplicando el TVM inductivamente  $(k + 1)$  veces, para  $x > \bar{x}$  (resp.  $x < \bar{x}$ ) se encuentra  $\xi \in (\bar{x}, x)$  (resp.  $\xi \in (x, \bar{x})$ ) tal que

$$\frac{f(x) - T_f^k(x - \bar{x})}{(x - \bar{x})^{k+1}} = \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k + 1)!}. \quad \square$$

### Ejemplo 2.38.

Retomando el Ejemplo 2.32 y usando el Teorema anterior, el error cometido al reemplazar  $\exp(x)$  por su desarrollo de orden  $k$  se expresa como

$$\exp(x) - \sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} = \frac{\exp(\xi)}{(k + 1)!} x^{k+1}$$

con  $\xi \in (0, x)$  si  $x > 0$ , o bien  $\xi \in (x, 0)$  si  $x < 0$ . En ambos casos se obtiene

$$\left| \exp(x) - \sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} \right| \leq \exp(|x|) \frac{|x|^{k+1}}{(k + 1)!},$$

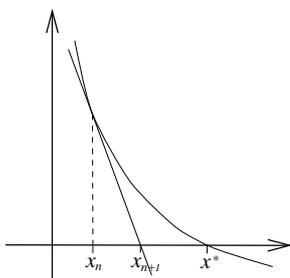
y puesto que  $|x|^{k+1}/(k + 1)! \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , se deduce

$$\exp(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

## 2.10. El método de Newton

Consideremos la ecuación  $f(x) = 0$  donde  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable tal que  $f(a)f(b) < 0$ . En el capítulo de continuidad vimos que existe una solución  $x^* \in (a, b)$ , la cual podemos aproximar mediante el método de bisección. Dicho método, a pesar que nos asegura converger hacia  $x^*$ , es relativamente lento.

Usando la noción de derivada podemos construir un método iterativo más eficiente. Supongamos que disponemos de una aproximación de la solución  $x_0 \sim x^*$ . Si en la ecuación  $f(x) = 0$  reemplazamos la función  $f(\cdot)$  por su aproximación afín en torno a  $x_0$ , obtenemos la ecuación lineal  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$ . Si  $f'(x_0) \neq 0$ , la solución de esta ecuación linealizada es  $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ , la cual podemos considerar como una nueva aproximación de  $x^*$ , que esperamos sea más precisa.



La iteración de este procedimiento a partir de la nueva aproximación conduce a un método iterativo de la forma

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

Método de Newton

el cual estará definido mientras se tenga  $f'(x_n) \neq 0$ . Esta iteración se conoce como el *Método de Newton* (para ecuaciones).

### Ejemplo 2.39.

Para la ecuación  $x^2 = a$ , la iteración de Newton toma la forma

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

la cual fué estudiada en detalle anteriormente, donde probamos que converge para todo punto de partida  $x_0 > 0$ . En esa ocasión se constató que la convergencia era muy rápida.

El siguiente resultado explica el origen de la rapidez del método de Newton.

---

**Teorema 2.10.** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^2$  y supongamos que  $x^* \in (a, b)$  es una solución de la ecuación  $f(x^*) = 0$  tal que  $f'(x^*) \neq 0$ . Entonces existen constantes  $\epsilon > 0$  y  $M > 0$  tales que para todo punto de partida  $x_0 \in I_\epsilon := (x^* - \epsilon, x^* + \epsilon)$  el método de Newton está bien definido y converge hacia  $x^*$  con

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^2.$$


---

DEMOSTRACIÓN. Sea  $M$  tal que  $|f''(x^*)| < M|f'(x^*)|$  y escojamos  $\epsilon \in (0, 1/M)$  de modo tal que se tenga  $|f'(x)| > |f'(x^*)|/2$  y  $|f''(x)| \leq M|f'(x^*)|$  para todo  $x \in I_\epsilon$ .

Si para un determinado  $n$  se tiene  $x_n \in I_\epsilon$ , entonces  $x_{n+1}$  está bien definido y

$$x_{n+1} - x^* = x_n - f(x_n)/f'(x_n) - x^* = \frac{f(x^*) - f(x_n) - f'(x_n)(x^* - x_n)}{f'(x_n)}.$$

Usando el Teorema de Taylor podemos encontrar  $\xi \in I_\epsilon$  tal que

$$|x_{n+1} - x^*| = \left| \frac{f''(\xi)(x^* - x_n)^2}{2f'(x_n)} \right| \leq M|x_n - x^*|^2 \leq M\epsilon|x_n - x^*|$$

y como  $M\epsilon < 1$  se sigue que  $x_{n+1} \in I_\epsilon$ . Esto permite razonar inductivamente a partir de  $x_0$  para deducir  $|x_n - x^*| \leq (M\epsilon)^n|x_0 - x^*| \rightarrow 0$ .  $\square$

Gruesamente, la desigualdad  $|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^2$  nos dice que el número de decimales exactos en la aproximación se duplica en cada iteración, lo cual es muy satisfactorio. Desafortunadamente el resultado anterior es de carácter local: solo asegura la convergencia si partimos suficientemente cerca de  $x^*$ , cuestión que no podemos saber *a priori* pues en general desconocemos  $x^*$ ! Existen resultados más explícitos, como el Teorema de Newton-Kantorovich, pero caen fuera de los objetivos de este curso. Nos limitaremos a ilustrar el teorema anterior a través del siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.40.**

Consideremos la ecuación  $\tan(x) = x$  del Ejemplo 1.2. Nos interesa la solución de esta ecuación en el intervalo  $(\pi/2, 3\pi/2)$ . El método de Newton conduce a la iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\tan(x_n) - x_n}{\tan^2(x_n)}.$$

Iterando a partir de  $x_0 = 4,45$  se obtiene

| $n$ | $x_n$    | $f(x_n)$ |
|-----|----------|----------|
| 0   | 4.450000 | -7.3e-01 |
| 1   | 4.502423 | 1.9e-01  |
| 2   | 4.493791 | 7.7e-03  |
| 3   | 4.493410 | 1.4e-05  |
| 4   | 4.493409 | 4.5e-11  |
| 5   | 4.493409 | 8.9e-16  |

llegando a la estimación  $x^* \sim 4,49340945790906$ . Se aprecia la clara superioridad del método de Newton que en 5 iteraciones alcanza una precisión de  $10^{-15}$ , respecto del método de bisección que toma 21 iteraciones para una precisión de apenas  $10^{-6}$ .