Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

4. Integral de Riemann

4.1. Introducción

La teoría de la integral de Riemann tiene un objetivo simple, que es: formalizar la noción de área mediante una definición que sea compatible con las ideas comunes e intuitivas acerca de este concepto.
Surge entonces la pregunta de ¿Cuales son estas ideas básicas?. Por ejemplo, una de ellas es que el área de una superficie cuadrada de lado a sea a^2. Si esto es verdadero, se debe concluir que la superficie de un rectángulo de lados a y b es $a \cdot b$.

4.2. Condiciones básicas para una definición de área

Sea E un conjunto de puntos en el plano OXY. El área del conjunto E será un número real $A(E)$ que cumple las siguientes condiciones. área

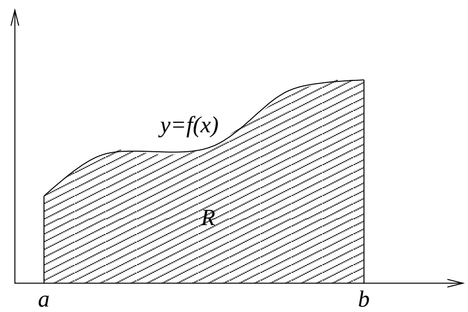
(A1) $A(E) \geq 0$

(A2) $E \subseteq F \Longrightarrow A(E) \leq A(F)$

(A3) Si $E \cap F = \emptyset \Longrightarrow A(E \cup F) = A(E) + A(F)$

(A4) El área de una región rectangular E de lados a y b es $A(E) = a \cdot b$

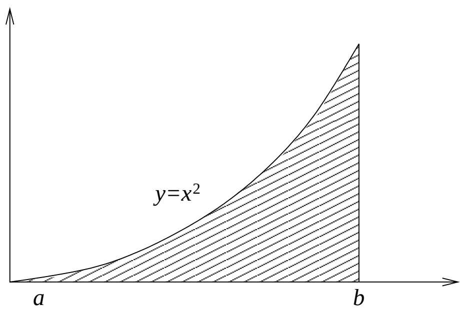
Estas 4 condiciones son necesarias y suficientes para tener una buena definición de área. Se verá mas adelante, en el transcurso del curso, que la integral de Riemann las satisface adecuadamente.
Observación: Las cuatro propiedades elementales anteriores no son independientes entre sí, ya que por ejemplo (A2) es una consecuencia de (A1) y (A3)
Mediante la integral de Riemann se definirá el área de una región E particular: Dada una función $f : [a, b] \to \ _+$ consideremos la región R limitada por el eje OX, la curva de ecuación $y = f(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. El área de esta región se llamará área bajo la curva $y = f(x)$ entre a y b.



Mediante un ejemplo se mostrará un método para determinar el área bajo una curva, que nos indicará el procedimiento a seguir en la definición de la integral de Riemann.

Ejemplo

Dada la función $f(x) = x^2$, se desea calcular el área encerrada entre $x = 0$ y $x = b > 0$ bajo la curva $y = f(x)$.



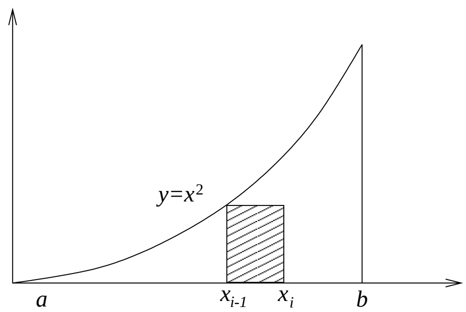
Etapa 1.

Dividiremos el intervalo $[0, b]$ en n partes iguales donde cada una de estas partes tiene longitud $h = \frac{b}{n}$. Si llamamos x_i a los puntos de la división, se tiene que: $x_i = i(b/n)$.
De este modo se ha dividido el intervalo $[0, b]$ en n sub-intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ de longitud h cada uno.

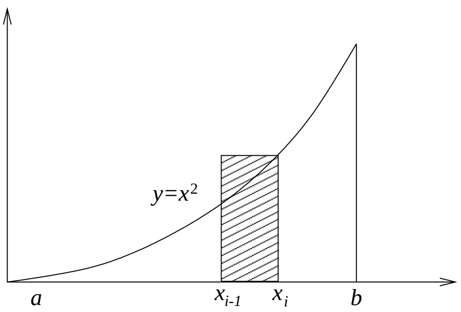
Etapa 2.

En cada intervalo I_i se levanta el rectángulo inscrito al sector parabólico de mayor altura posible. Este i-ésimo rectángulo inscrito posee las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
\text{base} &= h \\
\text{altura} &= f(x_{i-1}) \\
\text{área} &= h \cdot f(x_{i-1}) \\
&= \frac{b}{n} \cdot \left((i-1)\frac{b}{n} \right)^2 = \left(\frac{b}{n} \right)^3 (i-1)^2
\end{aligned}$$



Etapa 3.



De igual forma en cada intervalo I_i se levanta el rectángulo circunscrito al sector parabólico de menor altura posible. Este i-ésimo rectángulo circunscrito posee las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
\text{base} &= h \\
\text{altura} &= f(x_i) \\
\text{área} &= h \cdot f(x_i) \\
&= \frac{b}{n} \cdot \left(i\frac{b}{n}\right)^2 = \left(\frac{b}{n}\right)^3 i^2
\end{aligned}$$

Etapa 4.

Con esta construcción, se ve fácilmente que el área A que se desea calcular está acotada del modo siguiente

$$\sum_{i=1}^{n} (\frac{b}{n})^3 (i-1)^2 \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} (\frac{b}{n})^3 i^2.$$

Las sumatorias anteriores se calculan fácilmente recordando que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

De este modo,

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Así las cotas para el área A buscada son

$$\frac{b^3}{6} \frac{(n+1)(2n-1)}{n^2} \leq A \leq \frac{b^3}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

La desigualdad anterior es válida $\forall n \in$, luego, olvidando el significado geométrico de los números que allá intervienen, se puede pensar en una desigualdad de sucesiones reales. Por lo tanto, si tomamos el límite cuando $n \to \infty$ queda:

$$\frac{b^3}{3} \leq A \leq \frac{b^3}{3},$$

de donde se deduce que el área buscada es

$$A = \frac{b^3}{3}.$$

◀ Ejercicio

Ejercicio 4.1: Del mismo modo como se ha resuelto este ejercicio, se propone al lector calcular las áreas encerradas bajo las funciones $f(x) = 1$, $f(x) = x$ y $f(x) = x^3$. Por cierto en los dos primeros casos los resultados son bien conocidos, no así en el tercero. Nótese que al resolver estos ejercicios se observa lo siguiente:

función	Area entre 0 y b	donde
$f(x) = x^0$	$b \cdot h$	$h = 1$
$f(x) = x^1$	$\frac{b \cdot h}{2}$	$h = b$
$f(x) = x^2$	$\frac{b \cdot h}{3}$	$h = b^2$
$f(x) = x^3$	$\frac{b \cdot h}{4}$	$h = b^3$

Se deja también al lector la tarea de formular una generalización a estos resultados a potencias superiores.

◀ Ejercicio

> **Ejercicio 4.2:** Como último ejercicio propuesto se plantea calcular el área encerrada bajo la función $\operatorname{sen}(x)$ entre 0 y $\pi/2$.

Después de estos ejercicios de motivación podemos comenzar a definir el concepto de integral de Riemann de una función.

4.3. Definiciones

Partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$

Definición 4.1 (Partición de un intervalo).
El conjunto $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *es una partición del intervalo* $[a, b]$ *si* $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.
Si P *es una partición de* $[a, b]$*, se llama norma de* P *y se denota por* $|P|$ *al real:*

$$|P| = \text{máx}\{(x_i - x_{i-1}) : i = 1, ..., n\}$$

sumas superiores e inferiores

Definición 4.2 (Sumas Superiores e Inferiores).
Sea f *una función definida y acotada en* $[a, b]$[1]*. Sea* $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *una partición de* $[a, b]$*. Como* f *es acotada en* $[a, b]$*, también lo es en cada intervalo* $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ $\forall i = 1, ..., n$*, luego podemos definir:*

$$\begin{aligned} m_i(f) &= \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i(f) &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{aligned}$$

(La existencia de $m_i(f)$ *y* $M_i(f)$ *está garantizada por ser* f *acotada en* $[x_{i-1}, x_i]$*).*
Con esto se definen las sumas siguientes:
1) $S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1})$ *se llama suma superior de* f *correspondiente a la partición* P
2) $s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$ *se llama suma inferior de* f *correspondiente a la partición* P*.*

Interpretación Geométrica

Si $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$, entonces las sumas superior e inferior de f tienen una interpretación geométrica sencilla. $s(f, P)$ corresponde al área de los rectángulos inscritos. $S(f, P)$ es el área de los rectángulos circunscritos.

[1] Que f sea una función definida y acotada en $[a, b]$ significa que $[a, b] \subseteq \text{Dom}(f)$, es decir $f(x)$ existe $\forall x \in [a, b]$ y además existen las constantes m y M tales que:

$$\begin{aligned} m &= \text{ínf}\{f(x) : x \in [a, b]\} \\ M &= \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \end{aligned}$$

Propiedad Importante.

Sea f una función acotada y definida en $[a,b]$. Sea $P = \{x_0, ..., x_n\}$ una partición de $[a,b]$, cualquiera. Sean

$$\begin{aligned} m &= \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \\ M &= \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \\ m_i(f) &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i(f) &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{aligned}$$

es claro que $\forall i = 1, ..., n$ se tiene que:

m, M, $m_i(f)$, $M_i(f)$

$$m \leq m_i(f) \leq M_i(f) \leq M.$$

Luego:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad m(x_i - x_{i-1}) \leq m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq M(x_i - x_{i-1}).$$

Sumando desde $i = 1$ hasta $i = n$ se obtiene que:

$$m(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a). \tag{4.1}$$

Como P es una partición cualquiera, se concluye que el conjunto de las sumas inferiores de f es acotado, así como el conjunto de las sumas superiores de f. Esta propiedad da lugar a las dos definiciones siguientes:

Definición 4.3 (Integrales Superiores e Inferiores).

integrales superiores e inferiores

Sea $\mathcal{P}_{[a,b]}$ el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$. Sea f una función definida y acotada sobre $[a,b]$. Los números reales

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b} f &= \sup\left\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\right\}, \ y \\ \overline{\int_a^b} f &= \inf\left\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\right\}, \end{aligned}$$

se llaman integral inferior de f en $[a,b]$ e integral superior de f en $[a,b]$, respectivamente.

$\underline{\int_a^b} f$, $\overline{\int_a^b} f$

Observación: Por la propiedad demostrada anteriormente, se sabe que el conjunto de las sumas inferiores era acotado, lo mismo que el conjunto de las sumas superiores, luego en virtud del Axioma del supremo, están garantizadas las existencias de $\underline{\int_a^b} f$ y de $\overline{\int_a^b} f$. Para que todo esto sea válido es necesario y suficiente, que f este definida en $[a,b]$ y sea acotada en dicho intervalo.

Definición 4.4 (Refinamiento de una partición o partición más fina).

refinamiento

Sean P y Q dos particiones de $[a,b]$, si $P \subseteq Q$, diremos que Q es un refinamiento P o una partición más fina que P.

Ejemplo 4.1.
Si P_1 y P_2 son 2 particiones cualesquiera de $[a,b]$, entonces $P = P_1 \cup P_2$ es un refinamiento de P_1 y de P_2.

Proposición 4.1. *Si $P \subseteq Q$ entonces*

$$\begin{aligned} s(f,P) &\leq s(f,Q), \text{ y} \\ S(f,P) &\geq S(f,Q) \end{aligned}$$

Demostración. Si $P = Q$, la proposición es trivialmente cierta. Por lo tanto en el resto de la demostración trataremos el caso en que $P \neq Q$.
Para fijar ideas digamos que $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, sea $\bar{x}$ el primer punto que aparece en Q y no en P, entonces hay un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_{k-1} < \bar{x} < x_k$.
Sea $P_1 = \{x_0, ..., x_{k-1}, \bar{x}, x_k, ..., x_n\}$ y sean

$$\begin{aligned} m'(f) &= \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{k-1}, \bar{x}]\} \text{ y} \\ m''(f) &= \text{ínf}\{f(x) : x \in [\bar{x}, x_k]\}. \end{aligned}$$

Claramente:

$$m_k(f) \leq m'(f) \quad \text{y} \quad m_k(f) \leq m''(f).$$

Con esto calculemos las sumas inferiores de f para las particiones P y P_1:

$$\begin{aligned} s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(\Delta x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} m_i(f)(\Delta x_i) + m'(f)(\bar{x} - x_{k-1}) + m''(f)(x_k - \bar{x}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(f)\Delta x_i \\ &= s(f,P_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$s(f,P) \leq s(f,P_1).$$

Repitiendo este procedimiento un número finito de veces obtenemos que: $s(f,P) \leq s(f,Q)$.
La desigualdad con sumas superiores se demuestra en forma análoga y se deja propuesta como un ejercicio.

Observación: Como además $s(f,Q) \leq S(f,Q)$, se concluye que $\forall P, Q \in \mathcal{P}_{[a,b]}$.

$$P \subseteq Q \Longrightarrow s(f,P) \leq s(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,P).$$

Entonces, si P_1 y P_2 son particiones de $[a,b]$, tomando la partición $P = P_1 \cup P_2$ que es un refinamiento de P_1 y P_2, se tiene que

$$s(f,P_1) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq S(f,P_2),$$

es decir,

$$s(f,P_1) \leq S(f,P_2) \quad \forall P_1, P_2 \in \mathcal{P}_{[a,b]}.$$

O sea cualquier suma inferior es cota inferior del conjunto de sumas superiores y recíprocamente.

Proposición 4.2. *Si f está definida y acotada en $[a,b]$, y $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$, entonces*

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq M(b-a)$$

Demostración. Primeramente, como $m(b-a)$ es una cota inferior de $\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$, (Ecuación 4.1 en página 71) y como $\underline{\int_a^b} f = \sup \{s(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$, resulta que

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f.$$

Análogamente: $\overline{\int_a^b} f \leq M(b-a)$.
Para probar la desigualdad central, consideremos dos particiones P_1 y P_2 cualesquiera de $[a,b]$. Como $s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$ entonces, fijando P_1, se tiene que $s(f,P_1)$ es una cota inferior del conjunto $\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$ y por lo tanto:

$$s(f,P_1) \leq \text{ínf} \{S(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = \overline{\int_a^b} f.$$

La desigualdad anterior se cumple $\forall P_1 \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ luego el numero $\overline{\int_a^b} f$ es una cota superior del conjunto $\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$ y por lo tanto:

$$\overline{\int_a^b} f \geq \sup \{s(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = \underline{\int_a^b} f$$

Esta ultima expresión prueba la proposición.

Definición 4.5. *Diremos que una función f definida y acotada en $[a,b]$ es integrable según Riemann si se cumple que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En tal caso, el valor común de estas dos integrales se llama simplemente la integral de f en $[a,b]$ y se denota por $\int_a^b f$.*

Riemann integrable

$\int_a^b f$

Teorema 4.1 (Condición de Riemann). *Una función f definida y acotada en un intervalo $[a,b]$ es Riemann-integrable en $[a,b]$ ssi:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}) \quad S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

Demostración. Probemos primeramente que la condición de Riemann es suficiente, es decir, si la condición de Riemann se cumple entonces la función es integrable.
Sea $\epsilon > 0$. Sabemos que

$$(\exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}) \quad S(f,P) - s(f,P) < \epsilon.$$

Pero

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f &\leq S(f,P) \\ -\underline{\int_a^b} f &\leq -s(f,P) \end{aligned}$$

entonces,

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S(f,P) - s(f,P) < \epsilon.$$

Como esta ultima desigualdad es válida $\forall \epsilon > 0$ se concluye que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ y por lo tanto f es integrable en $[a,b]$.
Probemos ahora que la condición de Riemann es necesaria, es decir, que si f es integrable entonces la condición de Riemann debe cumplirse.
Sabemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \inf \left\{ S(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \right\} \\ &= \sup \left\{ s(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \right\} \end{aligned}$$

entonces, dado $\epsilon > 0$, en virtud de la caracterización ϵ del supremo y del ínfimo de un conjunto podemos garantizar la existencia de particiones P_1, P_2 de $[a,b]$ tales que

$$\begin{aligned} s(f,P_1) &> \int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} \\ S(f,P_2) &< \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Si además consideramos la partición $P = P_1 \cup P_2$, (refinamiento de P_1 y de P_2) y recordando que las sumas inferiores crecen y las superiores decrecen al tomar refinamientos, se deduce que

$$\begin{aligned} s(f,P) &> \int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} \\ S(f,P) &< \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

y por lo tanto
$$S(f,P)-\frac{\epsilon}{2}<s(f,P)+\frac{\epsilon}{2}$$
es decir
$$S(f,P)-s(f,P)<\epsilon.$$
Con esto, dado $\epsilon>0$ arbitrario, hemos encontrado una partición que verifica la condición de Riemann. $\square$

Ejemplo 4.2.
Probar que $f(x)=\frac{1}{x}$ es integrable en $[1,2]$.
Si $P=\{x_0,...,x_n\}$ es una partición de $[1,2]$ entonces en cada intervalo I_i se tiene que: $m_i(f)=\frac{1}{x_i}$ y $M_i(f)=\frac{1}{x_{i-1}}$. Por lo tanto,
$$\begin{aligned}S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-x_{i-1}}{x_{i-1}}) \text{ y}\\ s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-x_{i-1}}{x_i}).\end{aligned}$$
Notemos que esta sumas no son fáciles de calcular para una partición arbitraria. Sin embargo lo único que se desea aquí, es probar que la función es integrable y no calcular la integral. Con este objetivo en mente, nos basta con verificar la condición de Riemann. Calculemos entonces la diferencia entre las dos sumas:
$$\begin{aligned}S(f,P)-s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{x_{i-1}}-\frac{1}{x_i})(x_i-x_{i-1})\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{x_ix_{i-1}}.\end{aligned}$$
Como las variables $x_i\in[1,2]$ entonces
$$\frac{1}{2}<\frac{1}{x_i}<1,$$
y por lo tanto podemos acotar la diferencia como
$$S(f,P)-s(f,P) \quad\leq\quad \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})^2.$$
Para terminar recordamos que
$$x_i-x_{i-1}<|P|,$$
donde $|P|$ es la norma de la partición P. Entonces
$$S(f,P)-s(f,P)<|P|\cdot(2-1)=|P|.$$
En consecuencia para satisfacer la condición de Riemann, dado $\epsilon>0$ basta considerar una partición $P\in\mathcal{P}_{[1,2]}$ con norma $|P|\leq\epsilon$. Es decir
$$|P|\leq\epsilon\Longrightarrow S(f,P)-s(f,P)<\epsilon.$$
Por lo tanto, $f(x)=\frac{1}{x}$ es integrable en $[1,2]$.

Ejemplo 4.3.
Probar que $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \end{cases}$ no es integrable en $[0,1]$.
Sea $P = \{x_0, ..., x_n\}$ una partición de $[0,1]$, claramente en cada intervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ se tiene que

$$\begin{aligned} m_i(f) &= 0, \text{ y} \\ M_i(f) &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto las sumas de Riemann son

$$\begin{aligned} S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1} = b - a = 1, \text{ y} \\ s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = 0. \end{aligned}$$

Claramente se cumple que

$$S(f,P) - s(f,P) = 1 \quad \forall P \in \mathcal{P}_{[0,1]}$$

y luego la condición de Riemann no se cumple. Por lo tanto f no es integrable en $[0,1]$.

Observación: Este último ejemplo muestra que una función puede estar definida y ser acotada en un intervalo y sin embargo no ser Riemann integrable. Es decir ser Riemann integrable es una propiedad mas fuerte o exigente que sólo ser definida y acotada.
En este ejemplo también se puede observar que

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b} f(x) &= 0, \text{ y} \\ \overline{\int_0^1} f(x) &= 1. \end{aligned}$$

4.4. Estudio de Funciones Integrables

En esta sección nos preocupamos de saber bajo que requisitos se puede garantizar que una función definida y acotada en un intervalo es Riemann integrable. Los resultados más importantes en este sentido son el teorema (4.2) que garantiza que las funciones continuas son integrables y la proposición 4.3 que hace lo propio con las funciones monótonas.
Además se verá que en este tipo de funciones (las continuas o monótonas) la condición de Riemann se cumple en la medida que la norma de la partición sea suficientemente pequeña. Esto último permite entender la integral como el

límite de las sumas inferiores o superiores cuando la norma de la partición tiende a cero.

Proposición 4.3. *Si f es una función definida, acotada y monótona en $[a,b]$, entonces es integrable en $[a,b]$.*

Demostración. Supongamos que se trata de una función creciente (la demostración en el caso de función decreciente se propone como ejercicio). Si $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a,b]$ entonces

$$\begin{aligned} S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \\ s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) - f(x_{i-1}) \right] \Delta x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) - f(x_{i-1}) \right] |P| \\ &= |P| \left[f(b) - f(a) \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$ arbitrario, es fácil encontrar particiones con norma $|P| \leq \frac{1}{f(b)-f(a)+1}$[2] con lo cual la condición de Riemann se cumple satisfactoriamente.

Teorema 4.2. *Si f es una función continua en $[a,b]$ entonces es integrable en $[a,b]$*

Demostración. Es bien sabido que las funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ son uniformemente continuas, es decir satisfacen la propiedad

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \, \forall x_1, x_2 \in [a,b], \, \left[|x_1 - x_2| \leq \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon \right].$$

Con esta proposición no es difícil probar la condición de Riemann. En efecto, dado $\epsilon > 0$ arbitrario, la proposición anterior garantiza la existencia de $\delta > 0$ tal que si $|x_1 - x_2| \leq \delta$ entonces

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}. \tag{4.2}$$

[2] El 1 en el denominador $f(b) - f(a) + 1$ se introduce solo para evitar dividir por cero (en el caso de una función constante).

Consideremos una partición $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ con norma $|P| \leq \delta$. Como f es continua en $[a,b]$, también lo será en cada uno de los intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ definidos por la partición y por lo tanto el supremo M_i y el ínfimo m_i en dicho intervalo serán alcanzados como imágenes de algún punto. Es decir,

$$\begin{array}{ll} \exists x_i' \in [x_{i-1}, x_i], & f(x_i') = \text{ínf}\,\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ \exists x_i'' \in [x_{i-1}, x_i], & f(x_i'') = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}\,. \end{array}$$

Luego

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i'') - f(x_i')\right] \Delta x_{i.}$$

Pero como $|x_i' - x_i''| \leq \Delta x_i \leq |P| \leq \delta$ entonces se cumple (4.2), es decir que $|f(x_i'') - f(x_i')| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$. En consecuencia

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) &\leq \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i.} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Notemos que en la demostración anterior solo se requiere que $|P| \leq \delta$. Esto permite concluir el siguiente corolario.

Corolario 4.1. *Si f es continua en $[a,b]$ Entonces:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]}) \left\{ |P| \leq \delta \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f \right| \leq \epsilon \right\},$$

donde los valores $\bar{x}_i$ son números arbitrarios en el correspondiente $i-$ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ definido por la partición P. (por ejemplo $\bar{x}_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$)

Demostración. El teorema anterior dice que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]}) \{|P| \leq \delta \Rightarrow S(f,P) - s(f,P) \leq \epsilon\}\,.$$

Además, si $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una de las particiones anteriores y $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ entonces

$$m_i(f) \leq f(\bar{x}_i) \leq M_i(f).$$

multiplicando por Δx_i y sumando de $i = 1$ hasta $i = n$ se obtiene

$$s(f,P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) \leq S(f,P). \tag{4.3}$$

Por otro lado como la función es integrable se sabe que

$$s(f,P) \leq \int_a^b f \leq S(f,P). \tag{4.4}$$

Las desigualdades (4.3) y (4.4) se interpretan como que los números $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$ y $\int_a^b f$ pertenecen a un mismo intervalo de largo no mayor que ϵ. Por lo tanto,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f \right| \leq \epsilon$$

Observación: El corolario anterior se puede interpretar como una noción de límite cuando $|P| \to 0$, es decir, podemos escribir que cuando una función es continua su integral es

$$\int_a^b f = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i.$$

La expresión anterior motiva la siguiente notación, denominada notación de Leibnitz para integrales $\int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx.$$

Observación: Si f es continua en $[a,b]$ también se cumple que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]}) \left[|P| < \delta \Rightarrow \left| S(f,P) - \int_a^b f \right| < \epsilon \right]$$

y que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]}) \left[|P| < \delta \Rightarrow \left| s(f,P) - \int_a^b f \right| < \epsilon \right].$$

Observación: El corolario y la observación (4.4) también se cumple si f monótona.
Luego: si f es continua en $[a,b]$ o bien monótona en $[a,b]$ entonces se puede decir que:

$$\int_a^b f = \lim_{|P|\to 0} s(f,P) = \lim_{|P|\to 0} S(f,P) = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i.$$

4.5. Propiedades de la Integral

Ya hemos visto cual es la definición de la integral de una función. Sabemos que se trata de un número real asociado a la función. Sabemos que este real existe para un conjunto de funciones llamadas las funciones Riemann integrables, entre las cuales se encuentran las funciones continuas y las funciones monótonas. En cuanto al cálculo de integrales sólo conocemos la definición y sabemos que en la medida que las normas de las particiones sean pequeñas, las integrales se aproximan por sumatorias llamadas las sumas de Riemann. En esta sección nos interesa estudiar algunas propiedades del operador integral. Los resultados más atractivos se resumen en el Teorema 4.3 que dice que este operador es lineal y monótono. También veremos cómo se puede extender la noción de integral a los casos $a = b$ y $a > b$.

4.5.1. Lemas Previos (Propiedades Básicas)

Comenzamos por enunciar algunos lemas previos relativos a las integrales inferiores y superiores.

Lema 1. *Si f es una función integrable en $[a,b]$, $a < b$, y $[r,s] \subseteq [a,b]$, con $r < s$, entonces f es integrable en $[r,s]$.*

Lema 2. *Si f está definida y es acotada en $[a,b]$, $a<b$, y $c \in (a,b)$ entonces*

$$\underline{\int_a^b} f \;\geq\; \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \tag{4.5}$$

$$\overline{\int_a^b} f \;\leq\; \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f \tag{4.6}$$

Lema 3. *Si f y g son dos funciones definidas y acotadas en $[a,b]$, $a<b$, entonces:*

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \;\leq\; \underline{\int_a^b} (f+g) \tag{4.7}$$

$$\overline{\int_a^b} (f+g) \;\leq\; \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g \tag{4.8}$$

Demostración. (del lema 1) Como f es integrable en $[a,b] \Rightarrow$ se cumple la condición de Riemann en $[a,b]$, es decir:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]})\ S(f,P) - s(f,P) \leq \epsilon.$$

Sea $Q = P \cup \{r,s\}$, es claro que como r y $s \in [a,b]$, entonces Q es un refinamiento de P, luego $S(f,Q) - s(f,Q) \leq \epsilon$.
Para fijar ideas, digamos que $Q = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y que $r = x_k, s = x_\ell$ con $0 \leq k < \ell \leq n$.
Sea entonces $Q' = \{x_k, x_{k+1}, \cdots, x_\ell\} = Q \cap [r,s]$. Es claro que Q' resulta ser una partición de $[r,s]$ tal que:

$$S(f,Q') - s(f,Q') = \sum_{i=k+1}^{\ell} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = s(f,Q) - s(f,Q) < \epsilon.$$

Luego la partición Q' muestra que f verifica la condición de Riemann y por lo tanto es una función integrable en $[r,s]$.

Demostración. (del Lema 2)
Para demostrar (4.5) sean $P_1 \in \mathcal{P}_{[a,c]}$ y $P_2 \in \mathcal{P}_{[c,b]}$ dos particiones arbitrarias de $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente. Formemos la partición P de $[a,b]$ como $P = P_1 \cup P_2$.
Claramente

$$s(f,P_1) + s(f,P_2) = s(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f.$$

Esta desigualdad se puede escribir así

$$s(f,P_1) \leq \underline{\int_a^b} f - s(f,P_2) \quad \forall P_1 \in \mathcal{P}_{[a,c]}.$$

En consecuencia el real de la derecha es cota superior del conjunto de sumas inferiores de f en $[a,c]$ y por lo tanto

$$\underline{\int_a^b} f - s(f,P_2) \geq \underline{\int_a^c} f.$$

Esta expresión se puede también escribir así

$$\underline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^c} f \geq s(f, P_2) \quad \forall P_2 \in \mathcal{P}_{[c,b]},$$

es decir el número de la izquierda es una cota superior del conjunto de sumas inferiores de f en $[c, b]$. Entonces este número es mayor o igual al supremo, es decir

$$\underline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^c} f \geq \underline{\int_c^b} f.$$

La demostración de (4.6) es análoga y se deja como ejercicio.

Demostración. (del lema 3)
Como en el caso anterior, sólo demostraremos la fórmula (4.7), y dejaremos (4.8) como ejercicio. Para probar esta fórmula sean P_1 y P_2 particiones cualesquiera de $[a, b]$ y sea $P = P_1 \cup P_2$. Claramente

$$s(f, P_1) + s(g, P_2) \leq s(f, P) + s(g, P). \tag{4.9}$$

Para fijar ideas digamos que $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ entonces

$$\begin{aligned} s(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i \\ s(g, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(g)\Delta x_i \\ s(f+g, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f+g)\Delta x_i. \end{aligned}$$

Recordemos que $\forall x \in I_i, m_i(f) \leq f(x) \wedge m_i(g) \leq g(x)$ luego $m_i(f) + m_i(g) \leq m_i(f+g)$ y entonces

$$s(f, P) + s(g, P) \leq s(f+g, P) \leq \underline{\int_a^b} (f+g). \tag{4.10}$$

En la última desigualdad hemos recordado que la integral inferior es una cota superior del conjunto de sumas inferiores de una función (aquí la $f + g$). Combinando las ecuaciones (4.9) y (4.10) se tiene que

$$s(f, P_1) + s(g, P_2) \leq \underline{\int_a^b} (f+g).$$

Como esta desigualdad es válida $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ entonces de

$$s(f, P_1) \leq \underline{\int_a^b} (f+g) - s(g.P_2)$$

se deduce que

$$\underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} (f+g) - s(g.P_2),$$

y luego de

$$s(g, P_2) \leq \underline{\int_a^b} (f+g) - \underline{\int_a^b} f$$

se deduce que

$$\underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b} (f+g) - \underline{\int_a^b} f,$$

es decir

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b} (f+g).$$

4.5.2. Teorema con las propiedades de la integral

Usando los lemas probados en la subsección precedente se puede demostrar el siguiente teorema que resume las propiedades más importantes de la integral.

Teorema 4.3 (Propiedades de la Integral).

1. *Si $c \in$, entonces $\int_a^b c = c(b-a)$*
2. *Si f es integrable en $[a,b]$ y $c \in (a,b)$, entonces f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$, y además*
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
3. *Si f es integrable en $[a,c]$, y en $[c,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$ y*
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
4. *Si f y g son funciones integrables en $[a,b]$ entonces $(f+g)$ es integrable en $[a,b]$ y*
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$
5. *Si f es una función integrable en $[a,b]$ y $\alpha \in$ entonces (αf) es integrable en $[a,b]$ y*
$$\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f$$
6. *Si f y g son integrables en $[a,b]$ y $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$ entonces*
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$
7. *Si f es integrable en $[a,b]$, entonces $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y*
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

DEMOSTRACIÓN. 1. Sea $f(x) = c \ \forall x \in [a, b]$, sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición cualquiera de $[a, b]$ entonces en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se cumple que

$$m_i(f) = M_i(f) = c$$

por lo tanto las sumas inferior y superior son

$$s(f, p) = S(f, P) = c \sum \Delta x_i = c(b - a).$$

Claramente entonces

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = c(b - a) \Rightarrow \int_a^b c = c(b - a)$$

Luego,

$$\int_a^b c = c(b - a).$$

2. Por lema 1, si f es integrable en $[a, b]$ y $c \in [a, b]$, entonces f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$ (ambos $\subseteq [a, b]$) además por lema 2:

$$\int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq \int_a^b f$$

de donde claramente

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

3. Si f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces está definida y acotada en $[a, b]$. Por lema 2:

$$\overline{\int_a^b} f \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq \underline{\int_a^b} f.$$

Pero como la desigualdad contraria siempre es cierta, se deduce que f es integrable en $[a, b]$ y su integral vale

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

4. Como f y g son integrables en $[a, b]$ entonces el lema 3 se escribe así:

$$\overline{\int_a^b} (f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq \underline{\int_a^b} (f + g).$$

Luego $(f + g)$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\overline{\int_a^b} (f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq \underline{\int_a^b} (f + g).$$

5. Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición cualquiera de $[a,b]$. Analicemos primeramente el caso $\alpha \geq 0$. En este caso se tiene que

$$\begin{aligned} m_i(\alpha f) &= \alpha m_i(f), \text{ y} \\ M_i(\alpha f) &= \alpha M_i(f). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} S(\alpha f, P) &= \alpha S(f, P), \text{ y} \\ s(\alpha f, P) &= \alpha s(f, P). \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} \sup\{s(\alpha f, P)\} &= \sup\{\alpha s(f,P)\} = \alpha \sup\{s(f,P)\}, \text{ y} \\ \text{ínf}\{S(\alpha f, P)\} &= \text{ínf}\{\alpha S(f,P)\} = \alpha \,\text{ínf}\{S(f,P)\}, \end{aligned}$$

es decir

$$\underline{\int_a^b} \alpha f = \overline{\int_a^b} \alpha f = \alpha \int_a^b f$$

por lo tanto αf es integrable en $[a,b]$ y $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

En las líneas anteriores se ha usado el resultado bien conocido que dice que si $\alpha \geq 0$ y $A \subseteq$ es un conjunto acotado entonces

$$\begin{aligned} \sup(\alpha A) &= \alpha \sup(A), \text{ y} \\ \text{ínf}(\alpha A) &= \alpha \,\text{ínf}(A). \end{aligned}$$

En el caso en que $\alpha < 0$ la propiedad anterior se cambia por

$$\begin{aligned} \sup(\alpha A) &= \alpha \,\text{ínf}(A), \text{ y} \\ \text{ínf}(\alpha A) &= \alpha \sup(A), \end{aligned}$$

por lo tanto ahora tendremos que

$$m_i(\alpha f) = \alpha M_i(f), \text{ y } M_i(\alpha f) = \alpha m_i(f)$$

de donde

$$S(\alpha f, P) = \alpha s(f,P), \text{ y } s(\alpha f, P) = \alpha S(f,P)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \sup\{s(\alpha f, P)\} &= \sup\{\alpha S(f,P)\} = \alpha \,\text{ínf}\{S(f,p)\}, \text{ y} \\ \text{ínf}\{S(\alpha f, P)\} &= \text{ínf}\{\alpha s(f,P)\} = \alpha \sup\{s(f,p)\}, \end{aligned}$$

es decir

$$\underline{\int_a^b} \alpha f = \overline{\int_a^b} \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

Por lo tanto αf es integrable en $[a,b]$ y $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

6. Sea $h = g - f$. Como $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ entonces $h(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$. Además $h = g + (-1)f$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b h = \int_a^b g - \int_a^b f$. Como $h(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$, entonces para cualquier partición de $[a, b]$ se tendrá que $m_i(h) \geq 0$ luego $s(h, P) \geq 0$.

   Entonces
   $$0 \leq s(h, P) \leq \underline{\int_a^b} h = \int_a^b h = \int_a^b g - \int_a^b f,$$
   de donde
   $$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

7. Sean
   $$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$
   y
   $$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}.$$

   Entonces $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$. Para probar que $|f|$ es integrable probaremos previamente que f^+ lo es. Si $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición cualquiera de $[a, b]$ entonces como $f(x) \leq f^+(x)$, $\forall x \in [a, b]$ entonces $m_i(f) \leq m_i(f^+)$, o sea,
   $$-m_i(f^+) \leq -m_i(f). \tag{4.11}$$

   Además, si $M_i(f) \geq 0$ entonces $M_i(f^+) = M_i(f)$ y entonces sumando con (4.11) se obtiene que
   $$M_i(f^+) - m_i(f^+) \leq M_i(f) - m_i(f).$$

   Si por el contrario $M_i(f) < 0$ entonces f será negativa en el intervalo y luego $f^+ = 0$. Por lo tanto $M_i(f^+) = m_i(f^+) = 0$ de donde claramente
   $$M_i(f^+) - m_i(f^+) = 0 \leq M_i(f) - m_i(f).$$

   En definitiva, en cualquier intervalo de la partición se cumple que
   $$M_i(f^+) - m_i(f^+) \leq M_i(f) - m_i(f) \quad \forall i = 1, \ldots, n$$
   y por lo tanto sumando
   $$S(f^+, P) - s(f^+, P) \leq S(f, P) - s(f, P).$$

   Gracias a esta última desigualdad, deducimos que ya que f es integrable en $[a, b]$, entonces $(\forall \epsilon > 0)(\exists P' \in \mathcal{P}_{[a,b]})$ tal que
   $$S(f, P') - s(f, P') \leq \epsilon$$

y por lo tanto

$$S(f^+, P') - s(f^+, P') \leq \epsilon,$$

luego f^+ es integrable en $[a, b]$.

Como $f = f^+ - f^-$ entonces $f^- = f^+ - f$ y en consecuencia f^- también es integrable. Por último como $|f| = f^+ + f^-$ es la suma de funciones integrables, entonces también es integrable en $[a, b]$.

Para demostrar la desigualdad basta con recordar que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a, b]$$

y en consecuencia

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

es decir,

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

□

4.5.3. Integral de a a b con $a \geq b$

Definición 4.6. *Sea f una función integrable en un intervalo $[p, q]$. Si $a, b \in [p, q]$ son tales que $a \geq b$ entonces se define la integral de a a b del modo siguiente:*

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= -\int_b^a f \quad \text{si } a > b, \text{ o} \\ \int_a^b f &= 0 \quad \text{si } a = b. \end{aligned}$$

con esta definición, las propiedades de la integral se pueden enunciar así:

Proposición 4.4. *Sean f y g integrales en $[p, q]$ y $a, b \in [p, q]$ entonces:*

1) $\displaystyle\int_a^b \alpha = \alpha(b - a), \quad \forall \alpha \in$

2) $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \quad \forall c \in [p, q]$

3) $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f, \quad \forall \alpha \in$

4) $\displaystyle\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

5) $0 \leq f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [p, q] \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b g\right|$

6) $\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right|$

Demostración. La demostraciones son sencillas y se dejan propuestas como ejercicios. ◀ Ejercicio