MA33A- Cálculo Numérico
Control 1 - Primavera/2000

Profs. Raúl GORMAZ
Jorge A. SAN MARTÍN H.
Fecha: Jueves 17 de Agosto de 2000.

Problema 1. Se desea resolver numéricamente la ecuación cuadrática $0.5x^2 - 60x + 2 = 0$. Para ello trabajaremos en $\mathbb{F}(10, 4, -\infty, \infty)$ y usaremos las reglas de cálculo establecidas en la norma IEEE754.

a) Calcule las raices de la ecuación usando directamente la clásica fórmula de colegio

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Obs: Se sabe que $\sqrt{3596} = 59.966657\ldots$

b) Obtenga cotas para los errores de redondeo producidos en la evaluación de la fórmula anterior para cada raíz.

Obs: Note que hay operaciones que son exactas en $\mathbb{F}(10, 4, -\infty, \infty)$, por ejemplo: $(60 \cdot 60)$, $(4 \cdot 0.5 \cdot 2) \in \mathbb{F}$.

c) Factorizando la función cuadrática anterior como $0.5(x - x_1)(x - x_2)$ diga de que manera calcular x_2 una vez conocido x_1 (aqui hemos llamado x_1 a la raíz obtenida en **(a)** con el menor error relativo). Recalcule x_2 y reobtenga una cota del error cometido usando esta última fórmula.

Problema 2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tres veces derivable con derivada continua, es decir, $f \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R})$.

Para estimar la derivada $f'(x)$ de f se propone usar la fórmula aproximada

$$d(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

a) Usando un desarrollo de Taylor de f de orden dos con su resto correspondiente, demuestre que si el cuociente anterior se calcula en $\mathbb{R}$ (aritmética exacta) entonces existe una constante $C_1 \geq 0$ tal que

$$\forall h \in (0,1), \quad \left| f'(x) - d(h) \right| \leq C_1 h^2.$$

b) Si denotamos por $D(h)$ al valor calculado en $\mathbb{F}$, es decir

$$D(h) = (F(x \oplus h) \ominus F(x \ominus h)) \oslash (2 \otimes h)$$

demuestre que

$$\forall h \in (0,1) \cap \widetilde{\mathbb{F}}, \quad |D(h) - d(h)| \leq \frac{C_2}{h},$$

donde se ha denotado por $\widetilde{\mathbb{F}}$ al conjunto de aquellos valores de h para los cuales la suma $x \oplus h$ y la diferencia $x \ominus h$ son calculados en forma exacta.

Ind: En esta demostración suponga que se dispone de una “buena” implementación F para el cálculo de f, es decir,

$$\forall x \in \mathbb{F}, \quad F(x) = f(x)(1+\delta), \quad \text{con } |\delta| \leq \varepsilon_m.$$

c) Encuentre el valor óptimo para el parámetro h de modo que la cota superior del error cometido al aproximar $f'(x)$ por $D(h)$ sea mínimo.

Problema 3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable.

a) Dado $t \in (0,1)$, encuentre el polinomio P_t de grado ≤ 2 que interpola a f en los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = t$ y $x_2 = 1$.

b) Calcule los polinomios límites P y Q cuando $t \to 0$ y $t \to 1$ respectivamente. Verifique además que

$$\begin{aligned} P(0) = Q(0) &= f(0) \\ P(1) = Q(1) &= f(1) \\ P'(0) = f'(0) \quad &\text{y} \quad Q'(1) = f'(1). \end{aligned}$$

c) Demuestre que en general si P y Q son polinomios de grado $\leq (n+1)$ que interpolan a f en la malla $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y además son tales que $P'(x_0) = f'(x_0)$ y $Q'(x_n) = f'(x_n)$ entonces existe un polinomio $\alpha(x)$ de grado ≤ 1 tal que el polinomio R de grado $\leq (n+2)$ definido por

$$R(x) = \alpha(x)P(x) + (1 - \alpha(x))\,Q(x)$$

interpola a f en la misma malla y además $R'(x_0) = f'(x_0)$ y $R'(x_n) = f'(x_n)$.

Tiempo: **2h45**