

**MA33A- Cálculo Numérico**  
**Control 2 - Primavera/2000**

Profes. Raúl GORMAZ

Jorge A. SAN MARTÍN H.

Fecha: Jueves 28 de Septiembre de 2000.

**Problema 1.** Una función de uso frecuente en estadística es la definida por la integral

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Ante la imposibilidad de disponer de una fórmula elemental que permita la evaluación exacta de esta función, se plantea la alternativa de escribir una fórmula aproximada usando la técnica de la interpolación polinomial. Con este objetivo, dividiremos el intervalo  $[0, 1]$  en  $N$  partes iguales y contrataremos los servicios de la empresa "Integración Numerica S. A." para la evaluación de los valores de  $F$  en los puntos  $x_i = i/N$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ .

Usando esta información se pide estudiar cuanto debe ser el valor de  $N$  de modo que la interpolación de los valores de  $F$  tenga un error absoluto inferior a  $10^{-6}$ , usando las dos estrategias siguientes:

- a) [3p] Interpolación lineal entre  $(i-1)/N$  e  $i/N$  ( $i = 1, \dots, N$ ).
- b) [3p] Interpolación de Hermite cúbica entre  $(i-1)/N$  e  $i/N$  ( $i = 1, \dots, N$ ). (Note que en este último caso se necesitan además los valores de  $F'$  en los puntos de la malla, pero estos se calculan fácilmente)

**Solución:**

a) Error del polinomio de interpolación en el caso afín:

$$F(x) - P_1(x) = \frac{1}{2}F''(\xi)(x - x_{i-1})(x - x_i)$$

para algún  $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$ .

Cálculo de las derivadas de  $F$ .

$$\begin{aligned} F'(x) &= e^{-x^2} \\ F''(x) &= -2xe^{-x^2} \end{aligned}$$

con esto es claro que en  $[0, 1]$   $|F(x)| \leq 2$ . Además la función  $|(x - x_{i-1})(x - x_i)|$  alcanza su máximo en el punto medio del sub intervalo el cual es  $\left(\frac{h}{2}\right)^2$

Con esto

$$|Error| \leq \frac{h^2}{4}$$

Como  $h = 1/N$ , para garantizar que el error sea menor que  $10^{-6}$  debe cumplirse que  $N^2 \geq \frac{1}{4}10^{-6}$  de donde basta que  $N \geq 500$ .

b) Error del polinomio de hermite cúbico:

$$F(x) - H(x) = \frac{1}{4!}F^{(4)}(\xi)(x - x_{i-1})^2(x - x_i)^2$$

para algún  $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$ .

Más derivadas de  $F$ .

$$\begin{aligned} F''(x) &= 2(x^2 - 1)e^{-x^2} \\ F^{(4)}(x) &= (8x - 4x^3)e^{-x^2} \end{aligned}$$

Con esto  $|F^{(4)}(x)| \leq 12$  en  $[0, 1]$ .

El error en este caso será acotado así

$$|Error| \leq \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 12 \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^4 = \frac{h^4}{32}$$

Para garantizar que este error sea menor que  $10^{-6}$  basta que  $N^4 \geq \frac{1}{32}10^6 = \frac{100}{32}10^4$  es decir basta que

$$N \geq 10 \left(\frac{100}{32}\right)^{1/4} \sim 14$$

**Problema 2.** En este problema deberá encontrar una fórmula para la función spline cúbica  $s(x)$  que interpola los datos  $\{0, 1, 0\}$  en la malla  $\{-1, 0, 1\}$  siguiendo la metodología siguiente.

Recuerde que en los extremos  $s''(x)$  vale cero. Llame  $a$  al valor (desconocido) de la segunda derivada de  $s$  en el origen.

a) [1.5p] Encuentre una fórmula para  $s''(x)$  en el intervalo  $[-1, 1]$  en términos de  $a$ , de la forma

$$s''(x) = \begin{cases} \cdots & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \cdots & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

b) [1.5p] Integre dos veces la expresión anterior para obtener una fórmula de  $s(x)$  en términos de  $a$  y cuatro constantes de integración.

- c) [1.5p] Use las condiciones de interpolación para determinar los valores de las constantes de integración en función de  $a$ .
- d) [1.5p] Encuentre el valor de la constante  $a$  y escriba la función spline cúbica resultante

**Solución:**

- a) Como  $s(x)$  es un polinomio cúbico en cada intervalo  $[-1, 0]$  y  $[0, 1]$  entonces  $s''(x)$  es un polinomio de grado 1 en esos intervalos, que vale 0,  $a$  y 0 en los puntos  $-1$ , 0 y 1 respectivamente. Luego

$$s''(x) = \begin{cases} a(1+x) & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ a(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- b) Integrando en cada intervalo se tiene que

$$s'(x) = \begin{cases} a(1+x)^2/2 + b & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -a(1-x)^2/2 + c & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

y entonces

$$s(x) = \begin{cases} a(1+x)^3/6 + bx + d & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ a(1-x)^3/6 + cx + e & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

donde  $b, c, d$  y  $e$  son constantes de integración.

- c) Como la spline pasa por los puntos  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$  y se tiene que

$$\begin{aligned} s(-1) = 0 &\iff -b + d = 0 \\ s(1) = 0 &\iff c + e = 0 \\ s(0^-) = 1 &\iff a/6 + d = 1 \\ s(0^+) = 1 &\iff a/6 + e = 1 \end{aligned}$$

entonces resulta que  $b = d = e = 1 - a/6$  y  $c = a/6 - 1$ .

- d)  $a$  se encuentra imponiendo la continuidad de  $s'(x)$  en 0.

$$s'(0^-) = s'(0^+) \iff a/2 + b = -a/2 + c$$

de donde resulta que  $a = -3$ .

con esto la spline pedida es

$$s(x) = \begin{cases} [3(1+x) - (1+x)^3]/2 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ [3(1-x) - (1-x)^3]/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

**Problema 3.** Considere un intervalo  $[a, b]$ , una malla  $\{x_0, \dots, x_n\} \subseteq (a, b)$  de al menos dos puntos y un conjunto de valores reales  $\{y_0, \dots, y_n\}$ .

Dada una función  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$  se define su energía elástica  $E(f)$  como la integral

$$E(f) = \int_a^b (f''(x))^2 dx.$$

Se plantea el problema de encontrar  $f \in \mathcal{C}_y^2([a, b]) = \{g \in \mathcal{C}^2([a, b]) : g(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n\}$  tal que

$$E(f) \leq E(g), \quad \forall g \in \mathcal{C}_y^2([a, b])$$

- a) [3p] Demuestre que si  $f \in \mathcal{C}_y^2([a, b])$  satisface la propiedad

$$\int_a^b f''(x)h''(x)dx = 0, \quad \forall h \in \mathcal{C}_0^2([a, b])$$

entonces  $f$  es solución del problema anterior.

b) [3p] Demuestre que existe a lo más una función en  $\mathcal{C}_y^2([a, b])$  que satisface la propiedad anterior.

Tiempo: 2h45