MA33A- Cálculo Numérico
Examen - Primavera/2000

Profs. Raúl Gormaz
Jorge A. San Martín H.
Fecha: Lunes 20 de Noviembre de 2000.

Problema 1.

a) **[3p]** Se desea calcular numéricamente la integral

$$I(f) = \int_t^{t+h} f(s)ds$$

usando una fórmula de cuadratura del tipo

$$I^*(f) = \alpha f(t) + \beta f(t-h).$$

Determine los valores de α y β para que la precisión de I^* sea máxima. ¿Cual es dicha precisión?

b) **[2p]** Se desea ahora integrar la ecuación diferencial

$$\begin{cases} u'(t) = F(u(t),t) & \text{en } (0,T) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

usando la versión integral siguiente

$$u(t+h) = u(t) + \int_t^{t+h} F(u(s),s)ds.$$

Encuentre la forma explícita del método numérico de integración de esta ecuación diferencial que resulta de utilizar la formula de cuadratura obtenida en (a).

c) **[1p]** Pruebe que esta fórmula de integración tiene un error local $O(h^3)$.

Problema 2. Se desea encontrar un polinomio de interpolación para una función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Para esto se construye una malla bidimensional de nueve puntos formada por los pares ordenados $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$,…, $(2,2)$.

a) **[2p]** Comencemos por trabajar en $\mathbb{R}$. Sean $\ell_0(x)$, $\ell_1(x)$, $\ell_2(x)$ los polinomios de Lagrange asociados a la malla $\{0,1,2\}$. Explicite estos polinomios y sus propiedades.

b) **[2p]** Con los 3 polinomios de Lagrange encontrados en (a) se forma un espacio vectorial de polinomios en dos variables definido por

$$E = \left\{ p(x,y) = \sum_{i,j=0}^{2} \alpha_{ij}\ell_i(x)\ell_j(y) \text{ tales que } \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Demuestre que la dimensión de este espacio es 9.

c) **[2p]** Demuestre que dado $f(x,y)$, existe un único polinomio en dos variables en E que interpola a f en los nodos de la malla bidimensional.

Problema 3. Para aproximar la segunda derivada de una función $f(x)$ en un punto $\bar{x}$ se usa la expresión

$$D_h^2 f(\bar{x}) = \frac{1}{h^2}\left\{ f(\bar{x}+h) - 2f(\bar{x}) + f(\bar{x}-h) \right\}.$$

a) **[2p]** Para funciones de la forma $f(x) = (x-\bar{x})^n$, encuentre hasta que exponente $n \in \mathbb{N}$ se cumpla que $D_h^2 f(\bar{x}) = f''(\bar{x})$. Determine el mayor grado de los polinomios donde se verifique $D_h^2 p(\bar{x}) = p''(\bar{x})$.

b) **[2p]** Usando este operador discretice la ecuación diferencial

$$(\mathscr{E}) \begin{cases} -u''(x) = q(x) & \text{en } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

usando una malla equiespaciada $\{x_0,\ldots,x_{n+1}\}$ del intervalo $[0,1]$ con $x_i = ih$ donde $h = \frac{1}{n+1}$. Es decir, encuentre la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ y el vector $b \in \mathbb{R}^n$ tales que el problema discretizado es encontrar un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga $A\vec{u} = b$.

c) **[2p]** Resuelva la ecuación diferencial $(\mathscr{E})$ en el caso particular en que $q(x) = 1$ y demuestre que el vector $\vec{u}$ definido por $u_i = u(x_i)$ es solución del problema discretizado.

Tiempo: **3h00**