MA33A- Cálculo Numérico
Pauta del Control 1 - Primavera/2001

Profs. Raúl GORMAZ
Jorge A. SAN MARTÍN H.
Fecha: Jueves 30 de Agosto de 2001.

Solución Problema 1.

Parte a)

$$\begin{aligned}
F_1 &= SQRT(1000 \oplus 1) \ominus SQRT(1000) \\
&= SQRT(1001) \ominus SQRT(1000) \\
&= 31{,}64 \ominus 31{,}62 \\
&= 0{,}02 \\
&= {,}2000 \cdot 10^{-1} \quad \text{(Forma optativa)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2 &= 1 \oslash (SQRT(1000 \oplus 1) \oplus SQRT(1000)) \\
&= 1 \oslash (SQRT(1001) \oplus SQRT(1000)) \\
&= 1 \oslash (31{,}64 \oplus 31{,}62) \\
&= 1 \oslash 63{,}26 \\
&= 0{,}01581 \\
&= 0{,}1581 \cdot 10^{-1} \quad \text{(Forma optativa)}
\end{aligned}$$

Parte b)

$$\begin{aligned}
F_1 &= SQRT(x \oplus 1) \ominus SQRT(x) && ;\text{uso indicación } x+1 \in \mathbb{F} \\
&= SQRT(x+1) \ominus SQRT(x) \\
&= \sqrt{x+1}(1+\delta_1) \ominus \sqrt{x}(1+\delta_2) && ;\text{donde } |\delta_1| \le \varepsilon_m \text{ y } |\delta_2| \le \varepsilon_m \\
&= \sqrt{x+1}(1+\delta_1)(1+\delta_3) - \sqrt{x}(1+\delta_2)(1+\delta_3) && ;\text{donde } |\delta_3| \le \varepsilon_m \\
&= \sqrt{x+1}(1+\delta_4) - \sqrt{x}(1+\delta_5) && ;\text{donde } |\delta_4| \le 2{,}02\varepsilon_m \text{ y } |\delta_5| \le 2{,}02\varepsilon_m \text{(Lema de simplificación)} \\
&= f(x) + \delta_4\sqrt{x+1} - \delta_5\sqrt{x}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
E_R(F_1) &= \frac{|F_1 - f(x)|}{f(x)} \\
&= \frac{|\delta_4\sqrt{x+1} - \delta_5\sqrt{x}|}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{|\delta_4|\sqrt{x+1}+|\delta_5|\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \\
&\leq \delta\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \qquad ;\text{donde } \delta = 2{,}02\varepsilon_m = 2\tilde{\varepsilon}_m \\
&= \delta\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2 \\
&\leq \delta\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}\right)^2 = 4\delta(x+1) = 8(x+1)\tilde{\varepsilon}_m
\end{aligned}
$$

En este caso $\tilde{\varepsilon}_m = 10^{1-4}/2 = 0{,}0005$. Luego $E_R(F_1) \leq 8008 * 1{,}01 * 0{,}0005 \sim 4$

$$
\begin{aligned}
F_1 &= SQRT(x\oplus 1)\ominus SQRT(x) \qquad ;\text{uso indicación } x+1\in\mathbb{F} \\
&= SQRT(x+1)\ominus SQRT(x) \\
&= \sqrt{x+1}(1+\delta_1)\ominus\sqrt{x}(1+\delta_2) \qquad ;\text{donde } |\delta_1|\leq\varepsilon_m \text{ y } |\delta_2|\leq\varepsilon_m \\
&= \sqrt{x+1}(1+\delta_1)(1+\delta_3)-\sqrt{x}(1+\delta_2)(1+\delta_3) \qquad ;\text{donde } |\delta_3|\leq\varepsilon_m \\
&= \sqrt{x+1}(1+\delta_4)-\sqrt{x}(1+\delta_5) \qquad ;\text{donde } |\delta_4|\leq 2{,}02\varepsilon_m \text{ y } |\delta_5|\leq 2{,}02\varepsilon_m (\text{Lema de simplificación}) \\
&= f(x)+\delta_4\sqrt{x+1}-\delta_5\sqrt{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2 &= 1\oslash(SQRT(x\oplus 1)\oplus SQRT(x)) \\
&= 1\oslash(SQRT(x+1)\oplus SQRT(x)) \\
&= 1\oslash\left(\sqrt{x+1}(1+\delta_1)\oplus\sqrt{x}(1+\delta_2)\right) \\
&= 1\oslash\left(\sqrt{x+1}(1+\delta_1)(1+\delta_3)+\sqrt{x}(1+\delta_2)(1+\delta_3)\right) \\
&= \frac{(1+\delta_4)}{\sqrt{x+1}(1+\delta_1)(1+\delta_3)+\sqrt{x}(1+\delta_2)(1+\delta_3)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+1}\frac{(1+\delta_1)(1+\delta_3)}{(1+\delta_4)}+\sqrt{x}\frac{(1+\delta_2)(1+\delta_3)}{(1+\delta_4)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+1}(1+\delta_5)+\sqrt{x}(1+\delta_6)} \qquad ;\text{donde } |\delta_5|\leq 3{,}03\varepsilon_m \text{ y } |\delta_6|\leq 3{,}03\varepsilon_m (\text{Lema de simplificación})
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
E_R(F_2) &= \frac{|F_2-f(x)|}{f(x)} \\
&= \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{x+1}(1+\delta_5)+\sqrt{x}(1+\delta_6)}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right|}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \\
&= \left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}(1+\delta_5)-\sqrt{x}(1+\delta_6)}{\sqrt{x+1}(1+\delta_5)+\sqrt{x}(1+\delta_6)}\right| \\
&= \left|\frac{-\delta_5\sqrt{x+1}-\delta_6\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}(1+\delta_5)+\sqrt{x}(1+\delta_6)}\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \delta \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}(1+\delta_5)+\sqrt{x}(1+\delta_6)} \qquad ;\text{donde } \delta = 3\tilde{\varepsilon}_m \\
&\leq 2\delta = 6\tilde{\varepsilon}_m = 0{,}00303
\end{aligned}
$$

En los calculos numericos realizados en (a) $F_1 = 0{,}02$ y $F_2 = 0{,}01581$. El valor "exacto" segun la tabla es $f = 0{,}0158074..$ Efectivamente el error relativo en F_1 es $1/3$ y en F_2 es ε_m.

Solución Problema 2.

Parte a) Se puede hacer una tabla de diferencias divididas

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
0	0	1=$h(0)$	0=$h'(0)$	$\frac{-1-0}{1-0} = -1$	$\frac{1-(-1)}{1-0} = 2$
1	0	1=$h(0)$	$\frac{0-1}{1-0} = -1$	$\frac{0-(-1)}{1-0} = 1$	
2	1	0=$h(1)$	0=$h'(1)$		
3	1	0=$h(1)$			

Por lo tanto el polinomio h se escribe como

$$
\begin{aligned}
h(x) &= 1+0(x-0)-1(x-0)^2+2(x-0)^2(x-1) \\
&= 1-x^2+2x^2(x-1) \\
&= 1-3x^2+2x^3
\end{aligned}
$$

Parte b) Probemos que el polinomio R interpola a f:

$$
\begin{aligned}
R(0) &= P(0)\cdot h(0)+Q(0)\cdot(1-h(0)) \\
&= f(0)\cdot 1+Q(0)\cdot(1-1) \\
&= f(0) \\
R(1) &= P(1)\cdot h(1)+Q(1)\cdot(1-h(1)) \\
&= P(1)\cdot 0+f(1)\cdot(1-0) \\
&= f(1)
\end{aligned}
$$

Veamos que la derivada de R interpola a la derivada de f. Primeramente

$$
R'(x) = P'\cdot h+P\cdot h'+Q'\cdot(1-h)-Q\cdot h'
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
R'(0) &= P'(0)\cdot h(0)+P(0)\cdot h'(0)+Q'(0)\cdot(1-h(0))-Q(0)\cdot h'(0) \\
&= f'(0)\cdot 1+f(0)\cdot 0+Q'(0)\cdot(1-1)-Q(0)\cdot 0 \\
&= f'(0) \\
R'(1) &= P'(1)\cdot h(1)+P(1)\cdot h'(1)+Q'(1)\cdot(1-h(1))-Q(1)\cdot h'(1) \\
&= P'(1)\cdot 0+P(1)\cdot 0+f'(1)\cdot(1-0)-f(1)\cdot 0 \\
&= f'(1)
\end{aligned}
$$

Parte c) Tanto $R(x)$ como $H(x)$ interpolan a f y su derivada en la malla $\{0,1\}$ luego la diferencia $R(x)-H(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a 4 que se anula en 0 y 1 y cuyas derivadas valen cero en 0 y 1. Luego

$$R(x)-H(x)=Cx^2(x-1)^2$$

donde C es el coeficiente de x^4 en el polinomio $R(x)$. Es decir

$$\begin{aligned} C &= \big(\text{Coef de } x^1 \text{ en } P\big)\cdot\big(\text{Coef de } x^3 \text{ en } h\big)+\big(\text{Coef de } x^1 \text{ en } Q\big)\cdot\big(-\text{Coef de } x^3 \text{ en } h\big) \\ &= (f'(0)-f'(1))\cdot 2. \end{aligned}$$

Es decir

$$R(x)-H(x)=2(f'(0)-f'(1))x^2(x-1)^2$$

Solución Problema 3. Parte a)

Sean $P_1(x)$ el polinomio para $x\in[0,1]$, $P_2(x)$ el polinomio para $x\in[1,2]$ y $P_3(x)$ el polinomio para $x\in[2,3]$. Como cada P_j es de grado 2, se requieren 3 coeficientes para cada uno, en total, 9 coeficientes o incógnitas.

Las ecuaciones o condiciones provienen de:

CONTINUIDAD

(1) $P_1(0)=0$ (2) $P_1(1)=P_2(1)$ (3) $P_2(2)=P_3(2)$ (4) $P_3(3)=0$

CONTINUIDAD DE LA DERIVADA

(5) $P_1'(0)=0$ (6) $P_1'(1)=P_2'(1)$ (7) $P_2'(2)=P_3'(2)$ (8) $P_3'(3)=0$

PROPIEDAD (P3)

(9) $B(1)+B(2)=1$ (esta condición se puede escribir usando algunos de los polinomios, según convenga $P_{12}(1)+P_{23}(2)=1$)

Parte b)

Aprovechando (P3) y la indicación tenemos que $B(1)=B(2)=1/2$. Así, para el polinomio P_1:

$$P_1(0)=0,\ P_1(1)=0{,}5 \text{ y } P_1'(0)=0$$

De aquí, usando la fórmula de las diferencias divididas (con $x=0$ repetido, y utilizando la derivada en lugar de la primera diferencia dividida) se obtiene:

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
0	0	0=$P_1(0)$	0=$P_1'(0)$	$\frac{0{,}5-0}{1-0}=0{,}5$
1	0	0=$P_1(0)$	$\frac{0{,}5-0}{1-0}=0{,}5$	
2	1	0.5=$P_1(1)$		

De donde

$$P_1(x)=0{,}5x^2$$

Analogamente, para P_3 se obtiene, esta vez repitiendo el nodo $x=3$, como $P_3(2)=0{,}5$, $P_3(3)=0$, y $P_3'(3)=0$

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
0	3	0	0	$\frac{-0{,}5-0}{2-3}=0{,}5$
1	3	0	$\frac{0{,}5-0}{2-3}=-0{,}5$	
2	2	0.5		

$$P_3(x)=B(3)+B'(3)(x-3)+(B(2)-B(3)-B'(3))(x-3)^2=0{,}5(x-3)^2$$

Finalmente, para P_2 tenemos suficientes condiciones, pues tiene que “pegarse” C^1con P_1 y P_3 y por lo tanto, para este polinomio tenemos

$$P_2(1) = 0{,}5, P_2(2) = 0{,}5, P_2'(1) = P_1'(1) = 1, \text{ y } P_2'(2) = P_3'(2) = -1$$

Con esto es fácil ver que $P_2(x) = 0{,}5 + 1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (x-1)^2$.

Parte c)

Si x es entero entonces $x - i$ es también entero y $B(\text{entero}) = 0$, excepto $B(1) = 0{,}5 = B(2)$. Como la sumatoria recorre todos los enteros, pasará por este par de valores arrojando una suma de $0{,}5 + 0{,}5 = 1$. Para las derivadas, esto es analogo, salvo que $B'(1) = 1$ y $B'(2) = -1$ por lo cual la suma de las derivadas en todos los argumentos enteros arroja una suma de $1 + (-1) = 0$. Así, en un intervalo $[k, k+1]$ la S vale 1 en los extremos, y su derivada se anula en los extremos. Como en cada intervalo de esa forma, la S es un polinomio de segundo grado, será un polinomio de segundo grado que vale 1 en los extremos, y con derivada nula. El único posible polinomio cuadrático que cumple estas condiciones es el polinomio constante igual a 1.