MA33A- Cálculo Numérico
Control 1 - Primavera/2001

Profs. Raúl GORMAZ
Jorge A. SAN MARTÍN H.
Fecha: Jueves 30 de Agosto de 2001.

Problema 1. Para evaluar la función $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ se proponen las dos implementaciones numéricas siguientes

$$F_1 = SQRT(x \oplus 1) \ominus SQRT(x)$$

y

$$F_2 = 1 \oslash (SQRT(x \oplus 1) \oplus SQRT(x)).$$

a) Evalue numéricamente ambas expresiones para el valor particular $x = 1000$. En estas evaluaciones, considere que todos los cálculos se realizan en el sistema numérico $\mathbb{F}(10,4,-\infty,\infty)$ usando el modelo de aritmética de punto flotante estandar ($a \circledast b = fl(a*b)$ y $SQRT(x) = fl(\sqrt{x})\}$).

Obs: Algunos valores "exactos" útiles para sus cálculos son:

$\sqrt{1000}$ =31.62277660168...	1/63.24=0.015812776723...	1/63.26=0.015807777426...
$\sqrt{1001}$ =31.63858403911...	1/63.25=0.015810276679...	1/63.27=0.015805278963...

b) Realice un análisis teórico para obtener cotas de los errores relativos de redondeo esperados para cada una de las implementaciones anteriores. Compare estas cotas con los error efectivamente obtenido en (a).

Obs: En este análisis, suponga que tanto x como $x+1$ son elementos de $\mathbb{F}(10,4,-\infty,\infty)$ y por lo tanto la operación $x \oplus 1$ es exacta.

Problema 2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continuamente derivable, es decir, $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Sean P, Q los polinomios de grado menor o igual a uno tales que

$$P(0) = f(0), \qquad P'(0) = f'(0),$$
$$Q(1) = f(1) \quad \text{y} \quad Q'(1) = f'(1).$$

a) Encuentre el polinomio $h(x)$ de grado menor o igual a 3 que satisface las propiedades

$$h(0) = 1, \qquad h'(0) = 0,$$
$$h(1) = 0 \quad \text{y} \quad h'(1) = 0.$$

b) Demuestre que el polinomio R definido por la combinación

$$R(x) = P(x)h(x) + Q(x)(1 - h(x))$$

interpola a f y a su derivada en la malla $\{0,1\}$.

c) Denotemos por $H(x)$ el polinomio de Hermite de grado menor o igual a 3 que interpola a f y a su derivada en la malla $\{0,1\}$. Calcule $R(x) - H(x)$.

Problema 3. Considere la malla equiespaciada $\{0,1,2,3\}$. Definiremos la función B-spline cuadrática asociada a esta malla como aquella función $B(x)$ de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ que satisface las siguientes propiedades:

(P1) $B(x) = 0$ para todo x en $(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$.

(P2) La restriccion de $B(x)$ a cada subintervalo $[0,1]$, $[1,2]$ y $[2,3]$ es un polinomio de grado menor o igual a 2.

(P3) $B(1) + B(2) = 1$.

a) Verifique que con estas condiciones encontrar la función B-spline anterior equivale a un problema de 9 incógnitas con 9 ecuaciones. (No resuelva el problema, solo cuente las incognitas y las ecuaciones).

b) Encuentre explicitamente la expresión de $B(x)$ en cada subintervalo. Es decir, escriba $B(x)$ en la forma

$$B(x) = \begin{cases} P_1(x) & \text{si } x \in [0,1] \\ P_2(x) & \text{si } x \in [1,2] \\ P_3(x) & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$$

Indicación. Por argumentos de simetría se sospecha fuertemente que $B(1) = B(2)$. Utilice esta información extra para encontrar sucesivamente P_1, P_3 y finalmente P_2.

c) Con la función B-spline anterior se define la nueva función $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$S(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} B(x - i).$$

Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $S(x) = 1$.

Indicación: Claramente si $x \in \mathbb{Z}$ la suma anterior tiene solo dos términos no nulos. Por lo tanto es conveniente calcular $S(k)$ y $S'(k)$ para $k \in \mathbb{Z}$ y concluir que el resultado es cierto en el intervalo $[k, k+1]$ por argumentos de interpolación.

Tiempo: **2h45**