MA33A- Cálculo Numérico
Pauta del Control 1 - Primavera/2001

Profs. Raúl GORMAZ
Jorge A. SAN MARTÍN H.
Fecha: Jueves 30 de Agosto de 2001.

Solución Problema 1.

Parte a (i) (2ptos.) Como la fórmula debe ser exacta para pòlinomios de grado hasta 2. entonces

$$f(x)=1: \qquad C_1+C_2=b-a \tag{1}$$
$$f(x)=x: \qquad C_1a+C_2b=\left(b^2-a^2\right)/2 \tag{2}$$
$$f(x)=x^2: \qquad C_1a^2+C_2b^2+C_3(2b-2a)=\left(b^3-a^3\right)/3 \qquad ;(1\text{pto.}) \tag{3}$$

Claramente (1) y (2) implican que

$$C_1=C_2=(b-a)/2. \qquad (0{,}5\text{pto})$$

Además (3) entrega

$$C_3=-(b-a)^2/12 \qquad (0{,}5\text{pto})$$

Parte a (ii) (2ptos.) Por construcción, la fórmula de integración ya es exacta para polinomios de grado 2. Luego su precisión es ≥ 2.

Veamos si es ≥ 3. Basta estudiar $f(x)=(x-a)(x-b)(x-\bar{x})$ donde $\bar{x}=\frac{a+b}{2}$. En este caso

$$\int_a^b f(x)dx=0 \qquad \text{(basta usar Simpson)}$$

y la fórmula numérica entrega

$$\begin{aligned} I^*(f) &= C_3\left(f'(b)-f'(a)\right) \\ &= C_3\left((b-a)(b-\bar{x})-(a-b)(a-\bar{x})\right)=0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la precisión es ≥ 3.(1pto) Veamos si la precisión es ≥ 4. Basta tomar el polinomio $(x-a)^2(x-b)^2$, cuya integral es estrictamente positiva y donde $I^*(f)=0$. (1pto)

Parte b (2ptos.)

$$\begin{aligned} \int_a^b s(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} s(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{C_1\left(s(x_{i-1})+s(x_i)\right)+C_3\left(s'(x_i)-s'(x_{i-1})\right)\right\} && (0{,}5\text{pto, } s(x) \text{ es cúbica}) \\ &= C_1\sum_{i=1}^n \left(s(x_{i-1})+s(x_i)\right)+C_3\sum_{i=1}^n\left(s'(x_i)-s'(x_{i-1})\right) \\ &= \frac{h}{2}\sum_{i=1}^n\left(s(x_{i-1})+s(x_i)\right)-\frac{h^2}{12}\left(s'(b)-s'(a)\right) && (0{,}5\text{pto, telescópica}) \\ &= \frac{h}{2}\sum_{i=1}^n\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right)-\frac{h^2}{12}\left(s'(b)-s'(a)\right) && (0{,}5\text{pto, } s(x) \text{ interpola a } f) \\ &= TC(f)-\frac{h^2}{12}\left(s'(b)-s'(a)\right), && (0{,}5\text{pto, reconocer trapecios}) \end{aligned}$$

donde $TC(f)$ corresponde a la fórmula del trapecio compuesto.

Solución Problema 2.

Parte (a) (2pts) Como la fórmula debe ser exacta para polinomios de grado hasta 3 entonces

$$
\begin{aligned}
f(x) = 1: &\qquad A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 && (4)\\
f(x) = x: &\qquad A_1 h - A_2 h + 2A_3 h - 2A_4 h = 1 && (5)\\
f(x) = x^2: &\qquad A_1 h^2 + A_2 h^2 + 4A_3 h^2 + 4A_4 h^2 = 0 && (6)\\
f(x) = x^3: &\qquad A_1 h^3 - A_2 h^3 + 8A_3 h^3 - 8A_4 h^3 = 0 \qquad \text{(1pto)} && (7)
\end{aligned}
$$

Claramente (4) y (6) implican que $A_1 + A_2 = 0$ y $A_3 + A_4 = 0$. Además (5) y (7) Se escriben como

$$
\begin{aligned}
2A_1 h + 4A_3 h &= 1\\
2A_1 h + 16A_3 h &= 0
\end{aligned}
$$

De donde $A_1 = -A_2 = \frac{2}{3h}$ y $A_3 = -A_4 = -\frac{1}{12h}$. (1pto) Es decir

$$
D_h(f) = \frac{4}{3}\left(\frac{f(h) - f(-h)}{2h}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{f(2h) - f(-2h)}{4h}\right)
$$

Parte (b) (2pts) La fórmula de derivación tiene precisión ≥ 3 por construcción.

Veamos si la precisión es ≥ 4. Para ello consideremos $f(x) = x^4$ que tiene derivada nula en $x_0 = 0$. En este caso la fórmula numérica entrega

$$
D_h(x^4) = \frac{4}{3}\left(\frac{h^4 - (-h)^4}{2h}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{(2h)^4 - (-2h)^4}{4h}\right) = 0
$$

O sea la precisión es ≥ 4. (1pto) Veamos si la precisión es ≥ 5. Para ello consideremos $f(x) = x^5$ que tiene derivada nula en $x_0 = 0$. En este caso la fórmula numérica entrega

$$
\begin{aligned}
D_h(x^5) &= \frac{4}{3}\left(\frac{h^5 - (-h)^5}{2h}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{(2h)^5 - (-2h)^5}{4h}\right)\\
&= \frac{4}{3}\left(\frac{2h^5}{2h}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2(2h)^5}{4h}\right)\\
&= \frac{4}{3}h^4 - \frac{16}{3}h^4\\
&= -4h^4\\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

Es decir la precisión es sólo 4 (1pto).

Parte (c) (2pts) Como la precisión es 4 el error debe ser de la forma

$$
E = K f^{(5)}(\xi) h^p
$$

Es decir $k = 5$. (1pto) Para calcular K y p basta con notar que en el caso particular $f(x) = x^5$ se tiene que

$$
E = 4h^4 = K(5!)h^p
$$

de donde se obtiene $K = \frac{4}{5!} = \frac{1}{30}$ y $p = 4$ (1pto).

Solución Problema 3.

Parte a) (3pts) Cálculo de $L(x)$:

$$L(x) = f(1) + f[1,2](x-1) = 1 + \frac{4-1}{2-1}(x-1) = 3x-2 \qquad \text{(1pto)}$$

Cálculo de x_0

$$\begin{aligned} 3x_0 - 2 &= a \\ \Rightarrow\ x_0 &= \frac{a+2}{3} \end{aligned} \qquad \text{(0,5 pto)}$$

Cálculo del error

$$\begin{aligned} f(x) &= L(x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)(x-2) \\ &= L(x) + (x-1)(x-2) \\ f(\alpha) = a &= L(\alpha) + (\alpha-1)(\alpha-2) \end{aligned} \qquad \text{(0,5pto)}$$

Por otra parte, para el polinomio de grado 1, $L(x)$ podemos usar Taylor de orden 1:

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= L(x_0) + L'(x_0)(\alpha - x_0) \\ &= a + 3(\alpha - x_0) \end{aligned} \qquad \text{(0,5pto)}$$

Combinando ambas expresiones

$$|\alpha - x_0| \leq \frac{1}{3}|(\alpha-1)(\alpha-2)| \leq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} \leq \frac{1}{10} \qquad \text{(0,5pto)}$$

donde en esta última parte se utilizó que $P(x) = |(x-1)(x-2)|$ alcanza el máximo valor dentro del intervalo $[1,2]$ en el punto medio $x = 1{,}5$ y vale $P(1{,}5) = (0{,}5)^2 = \frac{1}{4}$.

Parte (b) (3pts)

Deducción de la iteración de Newton: Se sabe que una iteración de Newton corresponde a resolver $P(x) = 0$ donde P es el polinomio de grado 1 que interpola a $F(x) = x^2 - a$ y a su derivada $F'(x) = 2x$ en el punto x_n. Es entonces $P(x) = x_n^2 - a + (2x_n)(x - x_n)$, por lo que se debe resolver $P(x) = 0$ llamando x_{n+1} a la solución.

$$2x_n \cdot (x - x_n) = a - x_n^2 \ \Rightarrow\ x_{n+1} = x_n + \frac{a - x_n^2}{2x_n} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}). \qquad \text{(1pto)}$$

El cálculo del error es similar al caso anterior

$$\begin{aligned} F(x) &= P(x) + \frac{1}{2}F''(\xi)(x-x_n)^2 \\ &= P(x) + (x-x_n)^2 \\ F(\alpha) = 0 &= P(\alpha) + (\alpha - x_n)^2 \end{aligned}$$

Y utilizando Taylor de orden 1:

$$P(\alpha) = P(x_{n+1}) + P'(x_{n+1})(\alpha - x_{n+1}) = 0 + 2x_n(\alpha - x_{n+1})$$

Combinando ambas expresiones, se obtiene

$$|x_{n+1} - \alpha| = \frac{1}{2x_n}\,|x_n - \alpha|^2 \leq |x_n - \alpha|^2. \qquad \text{(1pto)}$$

Usando esta fórmula se tiene que

$$\begin{aligned} |x_1 - \alpha| &\leq |x_0 - \alpha|^2 \leq 10^{-2} \\ |x_2 - \alpha| &\leq |x_1 - \alpha|^2 \leq 10^{-4} \\ |x_3 - \alpha| &\leq |x_2 - \alpha|^2 \leq 10^{-8} \\ |x_4 - \alpha| &\leq |x_3 - \alpha|^2 \leq 10^{-16}. \end{aligned} \qquad \text{(1pto)}$$

Es decir basta iterar el método de Newton 4 veces ($n = 4$) para que el error de aproximar α por x_4 sea inferior a 10^{-16} cualquiera que sea $a \in (1,4)$.