

**MA33A- Cálculo Numérico**  
**Control 2 - Primavera/2002**

Prof. María Leonor VARAS S.  
Jorge A. SAN MARTÍN H.  
Fecha: Jueves 3 de Octubre de 2002.

**Problema 1.** Considere la sucesión definida recursivamente mediante la fórmula  $x_{n+1} = F(x_n)$  donde

$$F(x) = \frac{\lambda x + \cos(x)}{\lambda + 1}$$

y  $\lambda > 0$ .

- a) Demuestre que  $F([0, \pi/2]) \subset [0, \pi/2]$ , calcule  $\sup_{x \in [0, \pi/2]} |F'(x)|$  y deduzca que  $F$  tiene un único punto fijo  $\alpha$  en  $[0, \pi/2]$ , y que si  $x_0 \in [0, \pi/2]$  entonces la sucesión  $\{x_n\}$  converge a  $\alpha$ .
- b) Determine el orden (o velocidad de convergencia) de este método numérico en función del valor de  $\lambda$ . En particular encuentre el valor de  $\lambda$  en términos de  $\alpha$  ( $\lambda(\alpha)$ ) con el que el orden de convergencia es máximo.
- c) Si la fórmula anterior se usa cambiando  $\lambda(\alpha)$  por  $\lambda(x_n)$  verifique que el orden de convergencia sigue siendo máximo y el método numérico obtenido no es más que uno visto en clases (¿cual?).

**Problema 2.** Para aproximar el número  $\pi$  se propone usar una fórmula de integración numérica para calcular la integral siguiente

$$I = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

- a) Use las fórmulas simples del Trapecio y de Simpson para encontrar las estimaciones correspondientes del número  $\pi$ .
- b) Sabiendo que  $|f''(x)| \leq 2$  y  $|f^{(4)}(x)| \leq 4!$  determine en cuantos intervalos de largo  $h = 1/n$  se debe dividir  $[0, 1]$  de modo que el error entregado por las fórmulas del Trapecio y de Simpson compuestas entreguen el valor de  $\pi$  con un error inferior a  $\delta = 4 \cdot 10^{-10}$ .

**Problema 3.** Considere la fórmula de integración siguiente

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx Af(-a) + Bf(a) + Cf'(-a) + Df'(a)$$

donde  $a > 0$ .

- a) Determine en función de  $a$  los coeficientes  $A, B, C$  y  $D$  de modo que la fórmula sea exacta para los polinomios del mayor grado posible.
- b) Determine el valor de  $a$  tal que  $C = D = 0$ . Diga cual es entonces la fórmula de integración. ¿Que se puede decir del valor de  $a$  encontrado?
- c) Si  $a = 1$  encuentre una expresión del error de la fórmula de integración.

Tiempo: **2h30**