

**MA33A- Cálculo Numérico**  
**Control 1 - Primavera/2002**

Prof. Jorge A. SAN MARTÍN H.  
Fecha: Jueves 29 de Agosto de 2002.

**Problema 1.** Se desea resolver numéricamente la ecuación cuadrática  $x^2 - 60x + 1 = 0$ . Para simular los efectos del error de redondeo, trabajaremos en  $\mathbb{F}(10, 4, -\infty, \infty)$ , es decir usaremos un cálculo de 4 cifras significativas (redondeando los resultados intermedios).

- a) Calcule a mano, estimaciones numéricas de las raíces de esta ecuación usando las fórmulas siguientes y redondeo con aritmética de 4 dígitos

$$\hat{x}_1 = (-b \oplus SQRT[(b \odot b) \ominus (4 \odot a \odot c)]) \oslash (2 \odot a)$$

$$\hat{x}_2 = (-b \ominus SQRT[(b \odot b) \ominus (4 \odot a \odot c)]) \oslash (2 \odot a)$$

Obs: Se sabe que  $\sqrt{3596} = 59,966657\dots$

- b) Obtenga una segunda estimación de las raíces trabajando esta vez con el máximo de cifras posible. Suponiendo que estas últimas soluciones son “exactas”, estime numéricamente el error relativo de las estimaciones encontradas en (a).
- c) Obtenga cotas teóricas para los errores de redondeo producidos en la evaluación de las fórmulas de (a) para cada raíz. Use este cálculo para explicar el origen de la amplificación de los errores en  $\hat{x}_2$ .

Obs: Aquí, considere que no hay errores de redondeo en el subradical. Es decir  $(b \odot b) \ominus (4 \odot a \odot c) = b^2 - 4ac$ .

**Problema 2.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Considere la malla formada por los puntos  $\{x_i = a + i \cdot h\}_{i=0, \dots, n}$  donde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $h > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  son conocidos.

Se define el operador

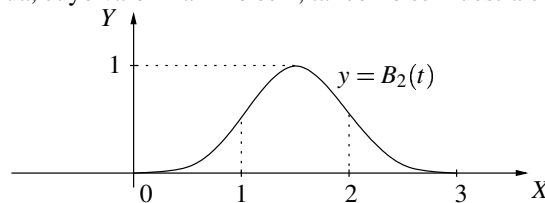
$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

- a) Demuestre que  $\Delta^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$ . (Obs:  $\Delta^2 f$  denota a la composición  $\Delta(\Delta f)$ )
- b) Pruebe que  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$

$$\Delta^k f(x) = k! h^k f[x, x+h, \dots, x+kh]$$

- c) Escriba el polinomio de interpolación de grado  $n$  de  $f$  en la malla usando este operador. ¿Puede dar alguna interpretación del operador  $\Delta^k f$  usando las derivadas de  $f$ ?

**Problema 3.** Se define la B-spline de orden 2,  $B_2(x)$  como una función con forma de campana, (simétrica), cuadrática por pedazos, con primera derivada continua, cuyo valor máximo es 1, tal como se muestra en el gráfico que sigue



Encuentre la fórmula de  $B_2(x)$ , es decir, los polinomios de segundo grado  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$  y  $p_3(x)$ , tales que la función definida como

$$B_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ p_1(x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ p_2(x) & \text{si } x \in [1, 2] \\ p_3(x) & \text{si } x \in [2, 3] \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

satisfaga la descripción anterior. Comience por contar las incógnitas y las ecuaciones de este problema.

Tiempo: **2h30**