MA33A - Cálculo Numérico
Examen

Prof. Jorge A. San Martín H.
Fecha: Lunes 25 de Noviembre de 2002.

Problema 1.

a) Se desea calcular numéricamente la integral

$$I(f) = \int_t^{t+h} f(s)ds$$

usando una fórmula de cuadratura del tipo

$$I^*(f) = Af(t) + Bf(t-h) + Cf(t-2h).$$

Determine los valores de A, B y C para que la precisión de I^* sea máxima. ¿Cual es dicha precisión?

b) Para resolver la ecuación diferencial

$$\begin{cases} u'(t) = F(t,u(t)) & \text{en } (0,T) \\ u(0) = 0 & \end{cases}$$

se usa la versión integral siguiente

$$u(t+h) = u(t) + \int_t^{t+h} F(s,u(s))ds.$$

Encuentre explícitamente del método numérico de integración de esta ecuación diferencial que resulta de utilizar la fórmula de cuadratura obtenida en a).

c) Pruebe que esta fórmula de integración tiene un error local $O(h^4)$.

Problema 2. Se desea integrar numéricamente la ecuación en derivadas parciales siguiente

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{en } (0,L) \times (0,T) \\ u(0,t) = 0 & \text{para todo } t \in [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para todo } x \in (0,L) \end{cases}$$

Para ello se forma una grilla del dominio $[0,L] \times [0,T]$ dividiendo el intervalo $[0,L]$ en N partes iguales de largo $\Delta x = L/N$ y dividiendo el intervalo $[0,T]$ en M partes iguales de largo $\Delta t = T/M$.
La derivada temporal se discretiza como siempre. Sin embargo, para la derivada espacial se proponen 3 alternativas:
Alternativa 1) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \approx \frac{u(x+\Delta x,t) - u(x,t)}{\Delta x}$
Alternativa 2) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \approx \frac{u(x,t) - u(x-\Delta x,t)}{\Delta x}$
Alternativa 3) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \approx \frac{u(x+\Delta x,t) - u(x-\Delta x,t)}{2\Delta x}$

a) Encuentre los errores de consistencia de las tres aproximaciones anteriores.

b) Si denotamos por w_i^j la aproximación de $u(i\Delta x, j\Delta t)$ escriba los tres esquemas numéricos explícitos que resultan de las aproximaciones anteriores.

c) Si los métodos anteriores se resumen como $\vec{w}^{j+1} = A\vec{w}^j$, donde el vector $\vec{w}^j \in \mathbb{R}^N$ es tal que $\left(\vec{w}^j\right)_i = w_i^j$. Determine el radio espectral de la matriz A para cada método numérico e indique si los métodos son o no estables.

Problema 3. Para interpolar la función $\sin x$ en el intervalo $[0,\pi]$ se sigue la estrategia siguiente: Se divide el intervalo $[0,\pi]$ en m partes iguales de largo $h = \pi/m$. En cada intervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ $i = 1,\ldots,m$ se pasa la parábola que pasa por los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}, f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})\right)$ y $(x_i, f(x_i))$.

a) Sabiendo que el error de interpolación en cada intervalo I_i se acota por una expresión de la forma $Kf^{(3)}(\xi)h^\alpha$. Determine las constantes K y α.

b) Determine el menor valor posible de m, de modo tal que la aproximación anterior tenga una cota del error absoluto inferior a 10^{-6}.

Tiempo: **3h00**