MA33A- Cálculo Numérico
Solución Control 1 - Primavera/2003

Profs. María Leonor VARAS
Jorge A. SAN MARTÍN
Fecha: Jueves 25 de Septiembre de 2003.

Solución P1.

Parte (a) Se impone que la fórmula sea exacta para los polinomios 1, x, $x^2,\dots,x^4$ obteniendose las cinco ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 2 & (1)\\ B-C &= 0 & (2)\\ B+C &= 2/3 & (3)\\ B-C &= 0 & (4)\\ B+C+2\cdot 4!D &= 2/5 & (5)\end{aligned}$$

Las ecuaciones (1)–(3) entregan los valores $A=\frac{4}{3}$, $B=C=\frac{1}{3}$.
La ecuación (4) coincide con la (2) y por lo tanto es automáticamente satisfecha.
La ecuación (5) entrega el valor $D=\frac{-1}{30\cdot 3!}=\frac{-1}{180}$.

Parte (b) Por construcción la fórmula es exacta para polinomios de grado inferior o igual a 4. Por lo tanto la precisión es mayor o igual a 4.
Veamos ademas que pasa con $f(x)=x^5$:
Claramente $\int_{-1}^{1}x^5dx=0$ y $I(x^5)=\frac{1}{3}(1-1)-\frac{1}{180}(0)=0$. Por lo tanto la precisión es mayor o igual a 5.
Vemaos que pasa con $f(x)=x^6$:
Por un lado $\int_{-1}^{1}x^6dx=\frac{2}{7}$. Por otro, $I(x^6)=\frac{1}{3}(1+1)-\frac{1}{180}(6\cdot 5\cdot 4+6\cdot 5\cdot 4)=-\frac{2}{3}$. Como estos valores no coinciden entonces la precisión no es mayor que 5.
Conclusión: La precisión de la fórmula es 5.

Parte (c) Se postula

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=I(f)+Kf^{(n)}(\xi).$$

Como la precisión de la fórmula es 5, el valor de n debe ser necesariamente $n=6$.
Para evaluar K veamos que sucede con esta fórmula para $f(x)=x^6$.

$$\frac{2}{7}=-\frac{2}{3}+K\cdot 6!.$$

De aquí se deduce que $K=\frac{1}{21\cdot 36}$.

Solución P2.

Parte (a) Usando la fórmula del trapecio la ecuación para despejar $y(b)$ es

$$y(b) \approx y(a) + \frac{y(a)+y(b)}{2}(b-a).$$

Despejando, si $b-a \neq 2$, se obtiene

$$\bar{y}_b = y(a)\frac{1+\frac{b-a}{2}}{1-\frac{b-a}{2}} \tag{6}$$

Parte (b) Aplicando (6) en $[0,\frac{1}{2}]$ se obtiene $\bar{y}_{\frac{1}{2}} = \frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5}{3}$.

Aplicando (6) en $[\frac{1}{2},1]$ se obtiene $\bar{y}_1 = \bar{y}_{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3} = \frac{25}{9}$.

Parte (c) Usanado la fórmula de Simpson en $[0,1]$ se obtiene

$$y(1) \approx y(0) + \frac{1}{6}\left(y(0)+4y(\tfrac{1}{2})+y(1)\right).$$

Despejando una aproximación para $y(1)$ sería

$$y(1) \approx \frac{7}{5}y(0) + \frac{4}{5}y(\tfrac{1}{2}).$$

Si usamos el valor aproximado de $y(\frac{1}{2}) \approx \frac{5}{3}$ dado en la parte anterior se obtiene

$$\tilde{y}_1 = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3} = \frac{21+20}{15} = \frac{41}{15}.$$

Parte (d) La dos estimaciones encontradas para e son $\bar{y}_1$ e $\tilde{y}_1$ que valen

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= \frac{25}{9} = \frac{125}{45},\\ \tilde{y}_1 &= \frac{41}{15} = \frac{123}{45}.\end{aligned}$$

Como $e \approx \frac{122{,}32}{45}$ entonces claramente la aproximación obtenida con Simpson es mejor que la con trapecios reiterados. Esto se debe a que la fórmula de Simpson es de mayor precisión que la fórmula de Trapecios.

Solución P3.

Parte (a) Para determinar P construimos una tabla de diferencias divididas repitiendo 2 veces el punto -2. Es decir

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
0	-2	0=$P(-2)$	$m=P'(-2)$	$0=P''(-2)$	$\frac{(1-m)-0}{(-1)-(-2)}=1-m$
1	-2	0=$P(-2)$	$m=P'(-2)$	$\frac{1-m}{(-1)-(-2)}=1-m$	
2	-2	0=$P(-2)$	$\frac{1-0}{(-1)-(-2)}=1$		
3	-1	1=$P(-1)$			

Con esto se obtiene

$$P(x)=0+m(x+2)+0(x+2)^2+(1-m)(x+2)^3=m(x+2)+(1-m)(x+2)^3.$$

Para determinar R construimos una tabla de diferencias divididas repitiendo 2 veces el punto 2. Es decir

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
0	1	1=$R(1)$	$\frac{0-1}{2-1}=-1$	$\frac{(-m)-(-1)}{2-1}=1-m$	$\frac{0-(1-m)}{2-1}=m-1.$
1	2	0=$R(2)$	-$m=R'(2)$	$0=R''(2)$	
2	2	0=$R(2)$	-$m=R'(2)$		
3	2	0=$R(2)$			

Con esto se obtiene

$$\begin{aligned} R(x) &= 1+(-1)(x-1)+(1-m)(x-1)(x-2)+(m-1)(x-1)(x-2)^2, \quad \text{o bien,} \\ &= 0+(-m)(x-2)+(0)(x-2)^2+(m-1)(x-2)^3=-m(x-2)+(m-1)(x-2)^3 \end{aligned}$$

Parte (b) El polinomio Q debe valer 1 en -1 y 1. Además sus derivadas deben coincidir con las de P y R respectivamente en -1 y 1.
Pero

$$\begin{aligned} P'(x) &= m+3(1-m)(x+2)^2, \\ R'(x) &= -m+3(m-1)(x-2)^2, \end{aligned}$$

luego en los respectivos puntos se obtiene

$$\begin{aligned} P'(-1) &= 3-2m, \\ R'(1) &= 2m-3. \end{aligned}$$

Con esto, Q se obtiene de la siguiente tabla de diferencias divididas donde se repiten una vez respectivamente los puntos -1 y 1. Es decir

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
0	-1	1	$3-2m=P'(-1)$	$\frac{0-(3-2m)}{1-(-1)}=m-\frac{3}{2}$	$\frac{\left(m-\frac{3}{2}\right)-\left(m-\frac{3}{2}\right)}{1-(-1)}=0$
1	-1	1	$\frac{1-1}{1-(-1)}=0$	$\frac{(2m-3)-0}{1-(-1)}=m-\frac{3}{2}$	
2	1	1	$2m-3=R'(1)$		
3	1	1			

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Q(x) &= 1+(3-2m)(x+1)+(m-\frac{3}{2})(x+1)^2+0(x+1)^2(x-1) \\
&= 1+(3-2m)(x+1)+(m-\frac{3}{2})(x+1)^2.
\end{aligned}$$

Parte (c) La función $g(x)$ se transforma en la Spline cúbica si en $x=-1$ y $x=1$ la segunda derivada es continua.

Calculemos P'',Q'' y R'':

$$\begin{aligned}
P''(x) &= 6(1-m)(x+2), \\
R''(x) &= 6(m-1)(x-2), \\
Q''(x) &= 2(m-\frac{3}{2})=2m-3.
\end{aligned}$$

En los puntos -1 y 1 se obtiene

$$\begin{aligned}
P''(-1) &= 6(1-m), \\
R''(1) &= 6(1-m), \\
Q''(-1)=Q''(1) &= 2m-3.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la segunda derivada es continua si la constante m satisface la ecuación $6-6m=2m-3$. Es decir, la constante $m$debe ser igual a $\frac{9}{8}$.

Con esto, la Spline a la izquierda de -2 es la recta de ecuación $\frac{9}{8}(x+2)$.

Análogamente, la Spline a la derecha de 2 es la recta de ecuación $-\frac{9}{8}(x-2)$.