

MA33A- Cálculo Numérico

Control 1 - Primavera/2003

Profs. María Leonor VARAS

Jorge A. SAN MARTÍN

Fecha: Jueves 25 de Septiembre de 2003.

Problema 1. Para calcular la integral de funciones en el intervalo $[-1, 1]$ se propone una fórmula numérica del tipo

$$\int_{-1}^1 f \approx I(f) = Af(0) + Bf(1) + Cf(-1) + D[f'''(1) - f'''(-1)]$$

- (2.0 pts.) Calcule los valores de las constantes A, B, C y D de modo que la fórmula sea exacta para polinomios de grado inferior o igual a 4.
- (2.0 pts.) Encuentre la precisión de la fórmula.
- (2.0 pts.) Suponiendo que la fórmula numérica tiene un error del tipo $E = Kf^{(n)}(\xi)$, calcule los valores de n y de K .

Problema 2. La ecuación diferencial $y'(x) = y(x)$ con la condición inicial $y'(0) = 1$, que tiene por solución $y(x) = \exp(x)$, puede también escribirse en forma integral como $y(b) = y(a) + \int_a^b y(t)dt$.

- (1.0 pts.) Use la fórmula del trapecio para aproximar la integral anterior. De la ecuación lineal resultante despeje una estimación del valor de $y(b)$ en términos de $y(a)$.
- (2.0 pts.) Use reiteradamente la fórmula anterior en los intervalos $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$ para obtener estimaciones de $y(\frac{1}{2})$ e $y(1)$.
- (2.0 pts.) Use ahora la fórmula de Simpson para aproximar $\int_0^1 y(t)dt$. Obtenga una nueva estimación para $y(1)$ usando el valor de $y(\frac{1}{2})$ estimado en la parte anterior.
- (1.0 pts.) Se sabe que $e \approx \frac{122,32}{45}$. ¿Cual de las dos estimaciones anteriores aproxima mejor a e ? ¿Es lo que usted esperaba? Explique.

Problema 3. Considere la malla de puntos $\{-2, -1, +1, +2\}$. Se define la función $g(x)$ como

$$g(x) = \begin{cases} P(x) & \text{si } x \in [-2, -1] \\ Q(x) & \text{si } x \in (-1, +1) \\ R(x) & \text{si } x \in [+1, +2], \end{cases}$$

donde P, Q y R son polinomios de grado inferior o igual a 3.

- (2.0 pts.) Dado $m \in \mathbb{R}$, determine las expresiones de los polinomios P y R que satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} P(-2) &= P''(-2) = 0, & P'(-2) &= m, & P(-1) &= 1 \\ R(+2) &= R''(+2) = 0, & R'(+2) &= -m, & R(+1) &= 1 \end{aligned}$$

- (2.0 pts.) Determine el polinomio Q tal que g resulte ser de clase $\mathcal{C}^1((-2, 2))$.

- c) **(2.0 pts.)** Encuentre (si es que existe) el valor de la constante m para que la función $g(x)$ coincida con la función spline $s(x)$ de interpolación de los datos $\{0, 1, 1, 0\}$ en la malla $\{-2, -1, +1, +2\}$. En tal caso escriba las expresiones de $s(x)$ a la izquierda de -2 y a la derecha de 2 .

Tiempo: **2h45**