MA33A- Cálculo Numérico
Control 2 - Primavera/2003

Prof. Jorge A. San Martín
Fecha: Jueves 30 de Octubre de 2003.

Problema 1. En este problema se desea encontrar fórmulas de integración de Gauss con uno y dos puntos para la integral impropia

$$I(f) = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} C_i f(x_i)$$

a) **(2.0 pts.)** Calcule las constantes α, β y γ de modo que los polinomios $P(x) = x+\alpha$ y $Q(x) = x^2+\beta x+\gamma$ sean respectivamente ortogonales a los espacios $\mathscr{P}_0(\mathbb{R})$ y $\mathscr{P}_1(\mathbb{R})$. Es decir que satisfacen las relaciones

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}P(x) = 0, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x}Q(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x}Q(x)x = 0.$$

b) **(2.0 pts.)** Usando el polinomio P escriba la fórmula Gaussiana con un punto que permita calcular la integral $I(f)$ con la mayor precisión posible. ¿Cual es la precisión de esta fórmula?

c) **(2.0 pts.)** Usando el polinomio Q escriba una fórmula Gaussiana con dos puntos que permita calcular la integral $I(f)$ con la mayor precisión posible. ¿Cual es la precisión de esta fórmula?

Problema 2. Dada una matriz invertible A se desea estudiar la sensibilidad de la solución del sistema $Ax = b$ con respecto a variaciones del lado derecho. Para ello se consideran dos lados derechos b y $\widetilde{b} = b+\delta b$ donde δb denota un error en los datos. Se denotan por x y $\widetilde{x}$ las soluciones del problema original y del problema perturbado respectivamente y por $E_x = \dfrac{\|x-\widetilde{x}\|}{\|x\|}$.

a) **(3.0 pts.)** Suponga que λ y μ son dos valores propios reales de A asociados a los vectores propios p y q respectivamente. Considere los datos $b = p$ y $\widetilde{b} = p+\varepsilon q$, es decir el error en los datos apunta en la dirección del vector propio q.
Encuentre una expresión para el error relativo E_x en función de λ, μ y del error relativo en los datos.
¿Que condiciones deben cumplir λ y μ para que $E_x = \kappa_2(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$? ¿Es posible que λ y μ sean tales que $E_x < \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$?

b) **(3.0 pts.)** Considere la matriz tridiagonal $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Calcule los valores y vectores propios de A. ¿Cuanto vale en este caso $\kappa_2(A)$? Indique vectores b y δb tales que $E_x = \kappa_2(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$.

Problema 3. Se desea resolver la ecuación $x^2 = \ln(1+2x)$.

a) **(2.0 pts.)** Demuestre que esta ecuación posee exactamente 2 soluciones de las cuales una es evidente. La otra solución la denotaremos s. Encuentre un intervalo encerrado entre enteros consecutivos donde se encuentre la raíz s.

b) **(3.0 pts.)** Estudie la convergencia de los siguientes métodos numéricos, indicando donde escoger x_0.

$$x_{n+1} = \sqrt{\ln(1+2x_n)} \qquad \text{y} \qquad x_{n+1} = \frac{\exp(x_n^2)-1}{2}$$

c) **(1.0 pts.)** Escriba en forma explícita el método de Newton que permite resolver esta ecuación.

Tiempo: **2h45**