MA33A-Cálculo Numérico
Solución - EJERCICIO N°1

Prof: Jorge San Martín
Fecha: 21-08-2003

P1:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-P)^2\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2Px_i+P^2)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2P\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i+P^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2P^2+P^2\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-P^2\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\\
&= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right] \qquad ;\mathbf{puntaje: 1{,}0puntos}
\end{aligned}$$

P2:

$x_1 = x_2 = x_3 = 11.$

Cálculo de s_i:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 0\oplus 11 = 11\\
s_2 &= 11\oplus 11 = 22\\
s_3 &= 22\oplus 11 = 33
\end{aligned}$$

Cálculo de q_i:

$$\begin{aligned}
q_1 &= 0\oplus(11\otimes 11) = 11\otimes 11 = fl(11\cdot 11) = fl(121) = 120 \qquad ;\mathbf{puntaje: 0{,}5puntos}\\
q_2 &= 120\oplus(11\otimes 11) = 120\oplus 120 = 240\\
q_3 &= 240\oplus(11\otimes 11) = 240\oplus 120 = 360
\end{aligned}$$

Cálculo de v:

$$\begin{aligned}
v &= \Big\{q_3\ominus[(s_3\odot s_3)\oslash 3]\Big\}\oslash 3\\
&= \Big\{360\ominus[(33\odot 33)\oslash 3]\Big\}\oslash 3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big\{360 \ominus [\,(fl(33\cdot 33))\oslash 3]\Big\}\oslash 3\\
&= \Big\{360 \ominus [\,(fl(1089))\oslash 3]\Big\}\oslash 3\\
&= \Big\{360 \ominus [1100 \oslash 3]\Big\}\oslash 3 \qquad ;\textbf{puntaje : 0.5puntos}\\
&= \Big\{360 \ominus [fl(1100/3)]\Big\}\oslash 3\\
&= \Big\{360 \ominus [fl(366.\bar{6})]\Big\}\oslash 3\\
&= \Big\{360 \ominus 370\Big\}\oslash 3 \qquad ;\textbf{puntaje : 0.5puntos}\\
&= -10 \oslash 3\\
&= -fl(10/3) = -fl(3.\bar{3}) = -3.3 \qquad ;\textbf{puntaje : 0.5puntos}
\end{aligned}
$$

P3:

$$
\begin{aligned}
v &= \Big\{q_n \ominus [\,(s_n \odot s_n)\oslash n]\Big\}\oslash n\\
&= \Big\{q_n \ominus [\,(s_n^2(1+\delta_1))\oslash n]\Big\}\oslash n\\
&= \Big\{q_n \ominus [\frac{s_n^2(1+\delta_1)}{n}(1+\delta_2)]\Big\}\oslash n\\
&= \Big\{q_n - [\frac{s_n^2(1+\delta_1)}{n}(1+\delta_2)]\Big\}(1+\delta_3)\oslash n\\
&= \frac{1}{n}\Big\{q_n - [\frac{s_n^2(1+\delta_1)}{n}(1+\delta_2)]\Big\}(1+\delta_3)(1+\delta_4) \qquad ;\textbf{puntaje : 0,5puntos}\\
&= \frac{1}{n}\Big\{q_n(1+\delta_3)(1+\delta_4) - \frac{s_n^2}{n}(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3)(1+\delta_4)\Big\}\\
&= \frac{1}{n}\Big\{Q_n\prod_{i=1}^{r}(1+b_i)(1+\delta_3)(1+\delta_4) - \frac{S_n^2}{n}\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)^2(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3)(1+\delta_4)\Big\}
\end{aligned}
$$

donde $|\delta_i| \leq \varepsilon_m$. Luego, usando el lema de simplificación se tiene que

$$
v = \frac{1}{n}\Big\{Q_n(1+c_n) - \frac{S_n^2}{n}(1+d_n)\Big\} \qquad ;\textbf{puntaje : +1,0puntos}
$$

donde $|c_n| \leq (r+2)\tilde{\varepsilon}_m = (2n+4)\tilde{\varepsilon}_m$ y $|d_n| \leq (2n+4)\tilde{\varepsilon}_m$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
|v-V| &= \frac{Q_n}{n}|c_n| + \frac{S_n^2}{n(n-1)}|d_n|\\
&\leq \frac{1}{n}\left(Q_n + \frac{S_n^2}{n}\right)2(n+2)\tilde{\varepsilon}_m \qquad ;\textbf{puntaje : 0,5puntos}
\end{aligned}
$$

En consecuencia, para el error relativo se tiene

$$
\frac{|v-V|}{|V|} \leq \frac{\left|Q_n + \frac{S_n^2}{n}\right|}{\left|Q_n - \frac{S_n^2}{n}\right|}2(n+2)\tilde{\varepsilon}_m \qquad ;\textbf{puntaje : 0.5puntos}
$$

Claramente $2(n+2)\tilde{\varepsilon}_m$ es el error esperable al realizar $2(n+2)$ operaciones en $\mathbb{F}$. Sin embargo el factor $\frac{\left|Q_n+\frac{S_n^2}{n}\right|}{\left|Q_n-\frac{S_n^2}{n}\right|}$ es un factor de amplificación no lineal de los errores que puede tender a ∞ si $V \to 0$. (**puntaje: 0.5 puntos**)