

**MA33A-Cálculo Numérico**  
**EJERCICIO N°1**

Prof: Jorge San Martín

Fecha: 21-08-2003

Dado un conjunto de datos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  se definen su promedio ( $P$ ) y su varianza ( $V$ ) como

$$P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad y \quad V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - P)^2$$

□ **Pregunta 1)** (1 pto.) Demuestre que la varianza se puede también calcular como

$$V = \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right].$$

A partir de esta fórmula se puede formular un algoritmo de cálculo de promedios y varianzas en forma incremental a medida que se van conociendo los datos (este es un método usado en varias calculadoras científicas). La idea de este algoritmo es ir guardando en memoria las sumas de los  $x_i$  y de los  $x_i^2$ . Este algoritmo se puede escribir matemáticamente como

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, & S_k &= S_{k-1} + x_k \\ Q_0 &= 0, & Q_k &= Q_{k-1} + x_k^2 \end{aligned}$$

Si la aritmética se realiza en un sistema del tipo  $\mathbb{F}(\beta, p, -\infty, \infty)$  entonces las sucesiones anteriores se transforman en

$$\begin{aligned} s_0 &= 0, & s_k &= s_{k-1} \oplus x_k \\ q_0 &= 0, & q_k &= q_{k-1} \oplus (x_k \odot x_k) \end{aligned}$$

□ **Pregunta 2)** (2 ptos.) Realice la experiencia numérica siguiente: Considere los datos  $x_1 = x_2 = x_3 = 11$ . ¿Cuanto valen en este caso los valores exactos de  $P$  y  $V$ ? Use la aritmética de  $\mathbb{F}(10, 2, -\infty, \infty)$  (con redondeo) para calcular las 6 sumas y luego la varianza ( $v$ ) mediante la fórmula

$$v = \left\{ q_3 \ominus [(s_3 \odot s_3) \oslash 3] \right\} \oslash 3$$

Recuerde que en una sumatoria normal se tiene  $s_n = S_n \prod_{i=1}^n (1 + a_i)$ , donde  $|a_i| \leq \epsilon_m$ .

Suponga además que en la suma de los cuadrados se cumple la regla  $q_n = Q_n \prod_{i=1}^r (1 + b_i)$  donde  $|b_i| \leq \epsilon_m$ .

□ **Pregunta 3)** (3 ptos.) Con estos datos, y suponiendo (para simplificar) que  $r = 2n + 2$  realice el análisis teórico de errores al aproximar la varianza  $V$  por el número  $v$  obtenido de la fórmula

$$v = \left\{ q_n \ominus [(s_n \odot s_n) \oslash n] \right\} \oslash n$$

Expresé sus cotas del error absoluto y relativo ( $|V - v|$  y  $\frac{|V - v|}{|V|}$ ) en términos de  $n$ ,  $\tilde{\epsilon}_m$ ,  $Q_n$  y  $\frac{S_n^2}{n}$ . Indique, si lo hay, cual es el factor de amplificación.

**Tiempo: 1 hora**