MA33A- Cálculo Numérico
Ejercicio 2 - Primavera/2003

Prof. Jorge A. SAN MARTÍN
Fecha: Lunes 14 de Noviembre de 2003.

Problema. La idea de este ejercicio es usar la fórmula de integración del punto medio para formular un método numérico que sirva para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo

$$(\mathscr{E})\begin{cases} \text{Encontrar } u:[0,T)\to\mathbb{R} \text{ continua en } [0,T) \text{ y derivable en } (0,T) \\ u'(t)=F(t,u(t)),\ \text{en } (0,T) \text{ y} \\ u(0)=u_0. \end{cases}$$

1) Use la fórmula de integración del punto medio para deducir que la solución $u(t)$ de $(\mathscr{E})$ satisface

$$u(t+h)=u(t)+Au'(t+\tfrac{h}{2})h+O(h^\alpha).$$

Aquí deberá explicitar los valores de las constantes A y α.

SOL: Claramente la solución de $(\mathscr{E})$ satisface

$$u(t+h)=u(t)+\int_t^{t+h}u'(s)ds. \tag{1}$$

Usando la fórmula del punto medio se tiene que

$$\int_t^{t+h}u'(s)ds=hu'(t+\tfrac{h}{2})+O(h^3).$$

Reemplazando esta fórmula en (1) se deduce que

$$u(t+h)=u(t)+u'(t+\tfrac{h}{2})h+O(h^3).$$

Es decir $A=1$ y $\alpha=3$.

Para implementar un método numérico inspirado en la ecuación anterior, es necesario estimar el término

$$u'(t+\tfrac{h}{2})=F\left(t+\tfrac{h}{2},u(t+\tfrac{h}{2})\right)$$

con un error del orden $O(h^{\alpha-1})$.

2) Sabiendo que la función F es Lipschitziana respecto al segundo argumento, demuestre que si $\widetilde{u}$ es una aproximación de $u(t+\frac{h}{2})$ tal que

$$\left|\widetilde{u}-u(t+\tfrac{h}{2})\right|\leq O(h^{\alpha-1})$$

entonces $F(t+\frac{h}{2},\widetilde{u})$ es una aproximación de $u'(t+\frac{h}{2})$ con un error del orden $O(h^{\alpha-1})$.

SOL: En efecto

$$\begin{aligned}\left|F(t+\tfrac{h}{2},\widetilde{u})-u'(t+\tfrac{h}{2})\right| &= \left|F(t+\tfrac{h}{2},\widetilde{u})-F\left(t+\tfrac{h}{2},u(t+\tfrac{h}{2})\right)\right| \\ &\leq L\left|\widetilde{u}-u(t+\tfrac{h}{2})\right| \\ &\leq O(h^{\alpha-1}).\end{aligned}$$

3) Usando los métodos vistos en clases, escriba una estimación $\widetilde{u}$ de $u(t+\frac{h}{2})$ con el error deseado.

SOL: Para aproximar $u(t+\frac{h}{2})$ con un error local del orden $O(h^2)$ basta con usar el método de Euler. Es decir

$$u(t+\tfrac{h}{2}) = u(t)+u'(t)\tfrac{h}{2}+O(h^2).$$

Es decir

$$\widetilde{u} = u(t)+u'(t)\frac{h}{2}.$$

4) Inspirándose en los cálculos previos, escriba el método numérico correspondiente en la forma

$$u_{k+1} = u_k + h\phi(t_k,u_k,h).$$

Diga explícitamente cual es la función $\phi(t,u,h)$ ¿Es consistente el método?¿cual es el orden del método?

SOL: De la parte (1) se deduce que

$$u(t+h) = u(t)+u'(t+\tfrac{h}{2})h+O(h^3).$$

Usando el resultado de la parte (2) para aproximar $u'(t+\frac{h}{2})h$ se tiene que

$$u(t+h) = u(t)+F(t+\tfrac{h}{2},\widetilde{u})h+O(h^3).$$

Usando la aproximación $\widetilde{u}$ dada en (3) se obtiene que

$$u(t+h) = u(t)+F(t+\tfrac{h}{2},u(t)+u'(t)\tfrac{h}{2})h+O(h^3).$$

Es decir el método numérico sería

$$u_{k+1} = u_k + h\phi(t_k,u_k,h),$$

donde

$$\phi(t,u,h) = F(t+\tfrac{h}{2},u+F(t,u)\tfrac{h}{2}).$$

De acuerdo a los cálculos previos, el método es consistente y de orden 2.

5) $\boxed{\text{Para estudiar la estabilidad del método comience por demostrar que la función } \phi(t,u,h) \text{ es Lipschitziana respecto del segundo argumento y use este hecho para concluir que el método es estable.}}$

SOL: Para probar que ϕ es Lipschitziana dados u_1 y u_2 calculemos

$$\begin{aligned}
|\phi(t,u_1,h)-\phi(t,u_2,h)| &= \left|F(t+\tfrac{h}{2},u_1+F(t,u_1)\tfrac{h}{2})-F(t+\tfrac{h}{2},u_2+F(t,u_2)\tfrac{h}{2})\right| \\
&\leq L\left|(u_1+F(t,u_1)\frac{h}{2})-(u_2+F(t,u_2)\frac{h}{2})\right| \\
&\leq L|u_1-u_2|+L|F(t,u_1)-F(t,u_2)|\frac{h}{2} \\
&\leq L|u_1-u_2|+L^2|u_1-u_2|\frac{h}{2} \\
&= L(1+L\tfrac{h}{2})|u_1-u_2|.
\end{aligned}$$

O sea la función ϕ es Lipschitziana de constante $M=L(1+L\frac{h}{2})\leq L(1+LT)$.
Para estudiar la Estabilidad, sean $\{y_i\}$ y $\{z_i\}$ las soluciones de las ecuaciones

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i+h\phi(t_i,y_i,h) \\
z_{i+1} &= z_i+h\phi(t_i,z_i,h)+h\varepsilon_i, \text{ con } z_0=y_0+\eta
\end{aligned}$$

Claramente

$$\begin{aligned}
|y_{i+1}-z_{i+1}| &= |y_i-z_i|+h|\phi(t_i,y_i,h)-\phi(t_i,z_i,h)|+h|\varepsilon_i| \\
&\leq |y_i-z_i|+hM|y_i-z_i|+h|\varepsilon_i| \\
&= (1+Mh)|y_i-z_i|+h|\varepsilon_i|.
\end{aligned}$$

De esta ecuación se deduce que si $E_i=|y_i-z_i|$ entonces

$$\begin{aligned}
E_0 &= |\eta| \\
E_1 &\leq (1+Mh)|\eta|+h|\varepsilon_0| \\
E_2 &\leq (1+Mh)^2|\eta|+h(1+Mh)|\varepsilon_0|+h|\varepsilon_1|
\end{aligned}$$

Así sucesivamente

$$\begin{aligned}
E_k &\leq (1+Mh)^k|\eta|+\sum_{j=0}^{k-1}h(1+Mh)^{k-1-j}|\varepsilon_j| \\
&\leq (1+Mh)^N|\eta|+(1+Mh)^N T\max_j|\varepsilon_j|
\end{aligned}$$

pero $h=T/N$por lo tanto

$$\begin{aligned}
E_k &\leq (1+\frac{MT}{N})^N(T+1)\left\{|\eta|+\max_j|\varepsilon_j|\right\} \\
&\leq \exp(MT)(T+1)\left\{|\eta|+\max_j|\varepsilon_j|\right\}
\end{aligned}$$

Con esto queda probado que el método es estable.

6) Escriba explícitamente la solución numérica entregada por este método al aplicarlo a la ecuación diferencial test: $u' = -mu$ donde $m > 0$ y $u(0) = 1$. Indique como tomar h para que la solución numérica tenga carácter disipativo y carácter positivo (no es necesario calcular explícitamente h)

SOL: En este caso

$$F(t,u) = -mu$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\phi(t,u,h) &= F(t+\tfrac{h}{2}, u+F(t,u)\tfrac{h}{2}) \\
&= -m\left(u+F(t,u)\frac{h}{2}\right) \\
&= -m\left(u-mu\frac{h}{2}\right) \\
&= -m\left(1-m\frac{h}{2}\right)u
\end{aligned}$$

Con esto

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= u_k - mh\left(1-m\frac{h}{2}\right)u_k \\
&= \left(1-mh+m\frac{h^2}{2}\right)u_k
\end{aligned}$$

De esta ecuación se deduce que el método es de carácter disipativo si $mh < 2$ y es siempre de carácter positivo.