

MA33A- Cálculo Numérico

Ejercicio 2 - Primavera/2003

Prof. Jorge A. SAN MARTÍN
Fecha: Lunes 17 de Noviembre de 2003.

La idea de este ejercicio es usar la fórmula de integración del punto medio para formular y estudiar un método numérico que sirva para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo

$$(\mathcal{E}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua en } [0, T] \text{ y derivable en } (0, T) \\ \text{tal que } u'(t) = F(t, u(t)), \text{ en } (0, T) \text{ y} \\ u'(0) = u_0. \end{array} \right.$$

- 1) (1pto.) Use la fórmula de integración del punto medio para deducir que toda solución $u(t)$ de (\mathcal{E}) suficientemente regular satisface

$$u(t+h) = u(t) + Au'(t + \frac{h}{2})h + O(h^\alpha).$$

Aquí deberá explicitar los valores de las constantes A y α .

Para implementar un método numérico inspirado en la ecuación anterior, es necesario estimar el término

$$u'(t + \frac{h}{2}) = F(t + \frac{h}{2}, u(t + \frac{h}{2}))$$

con un error del orden $O(h^{\alpha-1})$.

- 2) Sabiendo que la función F es Lipschitziana respecto al segundo argumento, demuestre que si \tilde{u} fuese una aproximación de $u(t + \frac{h}{2})$ tal que

$$|\tilde{u} - u(t + \frac{h}{2})| \leq O(h^{\alpha-1})$$

entonces $F(t + \frac{h}{2}, \tilde{u})$ sería una aproximación de $u'(t + \frac{h}{2})$ con un error del orden $O(h^{\alpha-1})$.

- 3) Usando los métodos vistos en clases, escriba una estimación \tilde{u} de $u(t + \frac{h}{2})$ con el error deseado.

- 4) Inspirándose en los cálculos previos, escriba el método numérico correspondiente en la forma

$$u_{k+1} = u_k + h\phi(t_k, u_k, h).$$

Diga explícitamente cual es la función $\phi(t, u, h)$ ¿Es consistente el método? ¿cual es el orden del método?

- 5) Para estudiar la estabilidad del método comience por demostrar que la función $\phi(t, u, h)$ es Lipschitziana respecto del segundo argumento y use este hecho para concluir que el método es estable (use una partición equiespaciada donde $h = \frac{T}{N}$).

- 6) Escriba explícitamente la solución numérica entregada por este método al aplicarlo a la ecuación diferencial test: $u'(t) = -mu(t)$ donde $m > 0$ y $u(0) = 1$.

Indique como tomar h para que la solución numérica:

- Sea positiva
- Tenga carácter disipativo

Tiempo: hasta las 11h45