MA33A- Cálculo Numérico
Ejercicio 2 - Primavera/2003

Prof. Jorge A. San Martín
Fecha: Lunes 17 de Noviembre de 2003.

La idea de este ejercicio es usar la fórmula de integración del punto medio para formular y estudiar un método numérico que sirva para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo

$$(\mathscr{E})\begin{cases} \text{Encontrar } u:[0,T)\to\mathbb{R} \text{ continua en } [0,T) \text{ y derivable en } (0,T) \\ \text{tal que } \quad u'(t)=F(t,u(t)), \text{ en } (0,T) \text{ y} \\ u'(0)=u_0. \end{cases}$$

1) (1pto.) Use la fórmula de integración del punto medio para deducir que toda solución $u(t)$ de $(\mathscr{E})$ suficientemente regular satisface

$$u(t+h)=u(t)+Au'(t+\tfrac{h}{2})h+O(h^{\alpha}).$$

Aquí deberá explicitar los valores de las constantes A y α.

Para implementar un método numérico inspirado en la ecuación anterior, es necesario estimar el término

$$u'(t+\tfrac{h}{2})=F\left(t+\tfrac{h}{2},u(t+\tfrac{h}{2})\right)$$

con un error del orden $O(h^{\alpha-1})$.

2) Sabiendo que la función F es Lipschitziana respecto al segundo argumento, demuestre que si $\widetilde{u}$ fuese una aproximación de $u(t+\frac{h}{2})$ tal que

$$\left|\widetilde{u}-u(t+\tfrac{h}{2})\right|\le O(h^{\alpha-1})$$

entonces $F(t+\frac{h}{2},\widetilde{u})$ sería una aproximación de $u'(t+\frac{h}{2})$ con un error del orden $O(h^{\alpha-1})$.

3) Usando los métodos vistos en clases, escriba una estimación $\widetilde{u}$ de $u(t+\frac{h}{2})$ con el error deseado.

4) Inspirándose en los cálculos previos, escriba el método numérico correspondiente en la forma

$$u_{k+1}=u_k+h\phi(t_k,u_k,h).$$

Diga explícitamente cual es la función $\phi(t,u,h)$ ¿Es consistente el método?¿cual es el orden del método?

5) Para estudiar la estabilidad del método comience por demostrar que la función $\phi(t,u,h)$ es Lipschitziana respecto del segundo argumento y use este hecho para concluir que el método es estable (use una partición equiespaciada donde $h=\frac{T}{N}$).

6) Escriba explícitamente la solución numérica entregada por este método al aplicarlo a la ecuación diferencial test: $u'(t)=-mu(t)$ donde $m>0$ y $u(0)=1$.
Indique como tomar h para que la solución numérica:
a) Sea positiva
b) Tenga carácter disipativo

Tiempo: **hasta las 11h45**