MA33A- Cálculo Numérico
Examen - Primavera/2003

Profs. María Leonor VARAS
Jorge A. SAN MARTÍN
Fecha: Lunes 24 de Noviembre de 2003.

Problema 1. Para evaluar numéricamente la función

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

en el intervalo $[0,1]$ se han cálculado, mediante integración numérica, sus valores en los puntos de la forma $x_i = i/N$, $i = 0,1,\ldots,N$ donde $N \in \mathbb{N}$. Con estos valores se interpola la función F en todo el intervalo $[0,1]$.

Usando esta información se pide estudiar cuanto debiera ser el valor de N de modo que la interpolación de los valores de F tenga un error absoluto inferior a 10^{-6}, usando dos estrategias diferentes. Para ello:

a) **(2.0 pts.)** Deduzca la fórmula general del error cometido al interpolar una función suficientemente regular $f(x)$ por el polinomio $P(x)$ que interpola a f en los puntos $x_1,\ldots,x_n$.
Indicación: puede serle util recordar que $f(x) - P(x) = Kf^{(m)}(\xi)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

b) **(2.0 pts.)** Estime el valor de N si la interpolación es lineal en cada subintervalo de la forma $\left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]$, donde $i = 1,\ldots,N$.

b) **(2.0 pts.)** Estime el valor de N si la interpolación es de Hermite cúbica entre $(i-1)/N$ e i/N ($i = 1,\ldots,N$). (Note que en este último caso se necesitan además los valores de F' en los puntos de la malla, pero estos se calculan fácilmente)

Problema 2. Se desea resolver numéricamente la ecuación no lineal

$$\operatorname{tg} x = 1 + x.$$

a) **(1.0 pts.)** Demuestre que en cada intervalo de la forma $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ la ecuación tiene exactamente una solución. (Puede usar un argumento gráfico o analítico).

b) **(3.0 pts.)** Para calcular la solución $\bar{x}$ en $(0, \frac{\pi}{2})$ se proponen los siguientes dos métodos numéricos:

$$x_{n+1} = \operatorname{tg} x_n - 1, \qquad \text{y} \qquad x_{n+1} = \operatorname{arctg}(x_n + 1).$$

Estudie la convergencia de ambos métodos, indicando como tomar x_0.

c) **(2.0 pts.)** Pruebe que si $x_{n+1} = F(x_n)$ es un método numérico (cualquiera) que resuelve esta ecuación, donde F es dos veces continuamente derivable con $F'(\bar{x}) \neq 1$ entonces el método

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n) - x_n}{F'(x_n) - 1}$$

converge a $\bar{x}$ con velocidad de convergencia al menos cuadrática.

Problema 3. Para calcular la integral de funciones en el intervalo $[t, t+h]$ se propone una fórmula numérica del tipo

$$I(f) = \int_t^{t+h} f \approx I_N(f) = Af(t) + Bf(t + \tfrac{2}{3}h)$$

a) **(3.0 pts.)** Calcule los valores de las constantes A y B de modo que la fórmula sea exacta para polinomios del mayor grado posible. Encuentre la precisión de la fórmula y el valor de α tal que

$$I(f) = I_N(f) + O(h^\alpha).$$

b) **(3.0 pts.)** Use la fórmula anterior para encontrar un método numérico que resuelva la ecuación diferencial

$$\begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)) & \text{en } (0, T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}.$$

Para calcular el término $F(t + \frac{2}{3}h, u(t + \frac{2}{3}h))$ use algún método de Runge-Kutta del orden apropiado para estimar $u(t + \frac{2}{3}h)$.

Tiempo: **3h00**