Solución y Pauta, Problema 1 Control 1 2004

a)

- $x - \frac{x^2}{x+1} = \frac{x(x+1)-x^2}{x+1} = \frac{x}{x+1}$

  Por esta razón: $E_2(x) = x \oslash (x \oplus 1)$ (0.5)

- Como en $E_1(x)$ aparece una <u>resta de números cercanos</u> cuando $x \to \infty$ y en $E_2(x)$ solo suma y cuociente entonces $E_2(x)$ aproximará mejor a $e(x)$ que $E_1(x)$ (0.5)
  [el $E_R(e(x), E_2(x)) \leq 2\tilde{\varepsilon}_m$]

-

$$
\begin{aligned}
E_1(699) &= 699 \ominus [(699 \odot 699) \oslash (699 \oplus 1)] \\
&= 699 \ominus [fl(488.601) \oslash fl(700)] \\
&= 699 \ominus [489 \oslash 700] && (0.5) \\
&= 699 \ominus fl(698,7\ldots) \\
&= 699 \ominus 699 && (0.5) \\
&= fl(0) = 0
\end{aligned}
$$

-

$$
\begin{aligned}
E_2(699) &= 699 \oslash [699 \oplus 1] \\
&= 699 \oslash 700 = fl(0.99857\ldots) \\
&= 0.999
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
E_1 &= x \ominus [x \odot x) \oslash (x \oplus 1)]; x \in \mathbb{F} \\
&= x \ominus [x^2(1+\delta_1) \oslash (x+1)(1+\delta_2)] \\
&= x \ominus -\frac{x^2(1+\delta_1)}{(x+1)(1+\delta_2)}(1+\delta_3) \\
&= \left[x - \frac{x^2(1+\delta_1)}{(x+1)(1+\delta_2)}(1+\delta_3)\right](1+\delta_4) \\
&= x(1+\delta_4) - \frac{x^2}{x+1} - \frac{(1+\delta_1)(1+\delta_3)(1+\delta_4)}{(1+\delta_2)} && (0.5)
\end{aligned}
$$

donde $|\delta_i| \leq \varepsilon_m$. Usando el Lema de simplificación:
$\exists \Delta, |\Delta| \leq 4\tilde{\varepsilon}_m$ tal que

$$
\begin{aligned}
E_1 &= x(1+\delta_4) - \left(\frac{x^2}{x+1}\right)(1+\Delta) && (0.5) \\
&= e + x\delta_4 - \frac{x^2}{x+1}\Delta
\end{aligned}
$$

Luego

$$\frac{|E_1 - e|}{e} \le \frac{|x||\delta_4| + |\frac{x^2}{x+1}|\Delta}{|\frac{x}{x+1}|} \qquad (0.5)$$

$$= |x+1||\delta_4| + |x|\Delta$$

$$\le 2(|x|+1)4\tilde{\varepsilon}_m \qquad (0.5)$$

tambien $(|x| + |x+\Delta|)4\tilde{\varepsilon}_m$

c)

$$E_2 = x \oslash [x \oplus 1]; x \in \mathbb{F}$$

$$= x \oslash [(x+1)(1+\delta_1)]$$

$$= \frac{x}{(x+1)(1+\delta_1)}(1+\delta_2) \qquad (0.5)$$

donde $|\delta_i| \le \varepsilon_m, i = 1,2$. Se usa nuevamente el lema de simplificación:

$$\exists \Delta, |\Delta| \le 2\tilde{\varepsilon}_m$$

$$E_2 = e(1+\Delta)$$

Por lo tanto $\left|\frac{E_2 - e}{e}\right| = |\Delta| \le 2\tilde{\varepsilon}_m$ (no hay factor de amplificación) (0.5)

En la parte (a) $\varepsilon_m = \frac{1}{2}(10)^{1-p} = \frac{1}{2}10^{-2} = \frac{0,01}{2} = \frac{1}{200}$ (0.5)

$$E_R(e, E_2) \le \frac{2 \cdot 1,01}{200} = \frac{1,01}{100} = 0,0101$$

Solución y Pauta, Problema 3, Control 1, 2004

a) p y q son polinomios de grado ≤ 3, o sea de la forma $ax^3 + bx^2$
$+ cx + d$. (0.5)
Por lo tanto, conocer p y q es equivalente a conocer $2 \times 4 = 8$ constantes.
$\Rightarrow$ El problema tiene 8 incognitas. (0.5)
p debe interpolar 3 datos $\Rightarrow$ 3 ecuaciones $(p(-2), p(-1), p(0))$
q debe interpolar 3 datos $\Rightarrow$ +3 ecuaciones $(q(0), q(1), q(2))$ (0,5)
con esto $s(x) \in \mathcal{C}^0([-2,2])$
s debe ser $\mathcal{C}^1$ y $\mathcal{C}^2$ en 0 $\Rightarrow$ +2 ecuaciones
$p'(0) = q'(0)$
$p''(0) = q''(0)$ (0.5)
$\Rightarrow$ Hay 8 ecuaciones

b) Dado $a \in \mathbb{R}, a = s'(0) = p'(0) = q'(0)$ se calculan p y q usando una tabla de diferencias divididas.

p

-2	0			
-1	1	1		
0	0	-1	-1	
0	0	a	$a+1$	$\frac{a}{2}+1$

(0.5)

$p(x) = (x+2) - 1(x+2)(x+1) + \left(\frac{a}{2}+1\right)(x+2)(x+1)x$ (0.5)

q

x	y	$q[x_i, x_{i+1}]$		
0	0			
0	0	a		
1	0	0	$-a$	
2	0	0	0	$a/2$

(0.5)

$q(x) = ax - ax^2 + \frac{a}{2}x^2(x-1)$ (0.5)

c) la constante a se calcula imponiendo $p''(0) = q''(0)$ (0.5)

$$\begin{aligned} p''(x) &= 0 - 2 + \left[\frac{a}{2} + 1\right](x^3 + 3x^2 + 2x)'' \\ &= -2 + \left(\frac{a}{2} + 1\right)(6x + 6) \\ p''(0) &= -2 + (3a + 6) = 3a + 4 \qquad (0.5) \\ q''(x) &= 0 - 2a + \frac{a}{2}(x^3 - x^2)'' \\ &= -2a + \frac{a}{2}(6x - 2) \\ q''(0) &= -2a - a = -3a \qquad (0.5) \end{aligned}$$

Luego

$$
\begin{aligned}
p''(0) = q''(0) &\Leftrightarrow a = -2/3 \\
s(x) &= \begin{cases} (x+2)[1-(x+1)+2/3x(x+1)] & \text{si } x \in [-2,0] \\ -2/3x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}(x^3 - x^2) & \text{si } x \in [0,2] \end{cases} \qquad (+0.5)
\end{aligned}
$$

Pauta pregunta 2

a) Calculo de p (que interpola los datos $0, 1, 1+h$)

x	y		
0	0		
1	1	1	
2	$1+h$	h	$\frac{h-1}{2}$

Tabla de dif. divididos

Polinomio p usando formula de Newton (de las dif. divididas)

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 + 1\cdot(x-0) + \frac{h-1}{2}(x-0)(x-1) \\ &= x + \frac{h-1}{2}\cdot x(x-1) \qquad (0.5) \end{aligned}$$

Para que sea monotono $p'(x)$ no debe cambiar de signo en el intervalo. Como $p'(x)$ es de grado 1 (su gráfico es una recta),

$$\{p'(x) \text{ no cambia de signo en } [0,2]\ \} \Leftrightarrow \{p'(0) \wedge p'(2) \text{ tienen el mismo signo }\}$$

Además como $p(0) = 0 < p(1) = 1, p$ solo puede ser creciente. Asi p monotona $\Leftrightarrow p' \geq 0 \wedge p'(2) \geq 0$ (0.5)

Calculo p': $p'(x) = 1 + \frac{h-1}{2}\cdot(2x-1)$

$$\left.\begin{array}{l} p'(0) = 1 - \frac{h-1}{2} = \frac{3-h}{2} \geq 0 \Leftrightarrow h \leq 3 \\ p'(2) = 1 + \frac{h-1}{2}\cdot 3 = \frac{-1+3-h}{2} \geq 0 \Leftrightarrow h \geq \frac{1}{3} \end{array}\right\} \text{con calculo de } p' + \text{ inec} \quad (0.5)$$

asi que

$$\begin{aligned} \text{monotona } &\Leftrightarrow p'(0) \geq 0 \wedge p'(2) \geq 0 \Leftrightarrow h \leq 3 \wedge h \geq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow h \in [\frac{1}{3}, 3] \end{aligned}$$

a) (sigue)

$$h = \frac{1}{3} : p(x) = x + \frac{\frac{1}{3} - 1}{2} \cdot x(x-1) = \frac{1}{3}x(4-x)$$
$$h = 3 : p(x) = x + \frac{3-1}{2} \cdot x(x-1) = x^2$$

(0.5)

b) <u>Si $h = 3$</u>: <u>Cálculo de Q</u>

Tabla de diferencias divididas

0	0			
1	1	1		
2	4	3	1	
2	4	$Q'(2) = 0$	-3	$\frac{-4}{2} = -2$

(1.0)

Formula de Newton

$$\boxed{Q(x) = 0 + 1x + 1 \cdot x(x-1) - 2x(x-1)(x-2)} \qquad (1.0)$$

(o recogiendo los coeficientes “desde abajo” de la tabla)

$$\boxed{Q(x) = 4 + 0 - 3(x-2)^2 - 2(x-2)^2(x-1)} \qquad (1.0)$$

c) $\alpha(x)$ tal que $R(x) = \alpha(x)p(x) + (1-\alpha(x))Q(x)$
verifique $R(0) = 0$ $R(1) = 1$ $R(2) = 4$ $R'(0) = 0 = R'(2)$

$$R(0) = 0 = \alpha(0)p(0) + (1-\alpha(0))Q(0) = \alpha(0) \cdot 0 + (1-\alpha(0)) \cdot 0$$
$$R(1) = 1 = \alpha(1)p(1) + (1-\alpha(1))Q(1) = \alpha(1) \cdot 1 + (1-\alpha(1)) \cdot 1 \equiv 1$$
$$R(2) = 4 = \alpha(2)p(2) + (1-\alpha(2))Q(2) = \alpha(2) \cdot 4 + (1-\alpha(2)) \cdot 4 \equiv 4$$

estas condiciones se satisfacen automaticamente (0.5)

Como $P(0)=0$, $P'(0)=0$ y $Q(0)=0$ se tiene:

$$\begin{aligned} R'(0) = 0 &= \alpha'(0)p(0)+\alpha(0)p'(0)-\alpha'(0)Q(0)+(1-\alpha(0))Q'(0) \\ &\Rightarrow (1-\alpha(0))Q'(0)=0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} Q'(x)=1+x+(x-1)-2(x-1)-2(x-1)(x-2)-2x(x-2)-2x(x-1) \\ Q'(0)=1+0+(-1)-2(-1)-2(-1)(-2)-0-0=-4\neq 0 \end{array}\right]$$

se pide que $\alpha(0)=1$ (0.5)

$$R'(2)=0=\alpha'(2)p(2)+\alpha(2)p'(2)-\alpha'(2)Q(2)+(1-\alpha(2))Q'(2)$$

$$[p(x)=x^2 p'(x)=2xp'(2)=4]$$

$$\begin{aligned} R'(2)=0 &= 4\alpha'(2)+4\alpha(2)-4\alpha'(2)+0 \\ &= 4\alpha(2) \end{aligned}$$

se pide además $\alpha(2)=0$ (0.5)

Por lo tanto,

$\boxed{\alpha(x)=1-\frac{x}{2}}$ (Encontrar α por cualquier método) (0.5)

Nota: No es necesario comprobar que

$$Q'(0)\neq 0 \text{ y que } p'(2)\neq 0$$

pues con α tal que $\alpha(0)=1\wedge\alpha(2)=0$ están aseguradas las condiciones

$$R'(0)=0\wedge R'(2)=0$$