MA33A- Cálculo Numérico
Control 1 - Otoño 2004

Profs. Raúl GORMAZ
Jorge A. SAN MARTÍN H.
Fecha: Jueves 15 de Abril de 2004.

Problema 1. Se desea evaluar numéricamente la expresión

$$e(x) = x - \frac{x^2}{x+1}$$

cuando x es grande. Para ello se trabaja en el sistema numérico $\mathbb{F}(\beta, p, -\infty, \infty)$ y se proponen las dos implementaciones siguientes:

$$\begin{aligned} E_1(x) &= x \ominus [(x \odot x) \oslash (x \oplus 1)] \\ E_2(x) &= (\ldots\ldots) \oslash (x \oplus 1) \end{aligned}$$

a) Complete lo que falta en la implementación $E_2(x)$. ¿Cuál implementación, a priori, debiera entregar un mejor resultado numérico de la expresión $e(x)$?
Calcule a mano, los valores de $E_1(699)$ y $E_2(699)$, trabajando en $\mathbb{F}(10, 3, -\infty, \infty)$, es decir usando un cálculo de 3 cifras significativas (redondeando los resultados intermedios).
Obs: Se sabe que $(699)^2 = 488601$,

b) Obtenga una cota teórica del error relativo obtenido al aproximar $e(x)$ por $E_1(x)$, usando la teoría estándar de propagación de errores en $\mathbb{F}(\beta, p, -\infty, \infty)$.

c) Obtenga ahora una cota teórica del error relativo obtenido al aproximar $e(x)$ por $E_2(x)$. ¿Cuanto vale esta cota en su cálculo realizado en **(a)**?

Problema 2. Considere la malla $\{0, 1, 2\}$. Dado $h \in \mathbb{R}$ se desea construir un polinomio de algún grado apropiado que interpole los datos $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(2) = 1 + h$ y que **sea monótono** en [0,2] .

a) Si P es el polinomio cuadrático que interpola a estos datos, demuestre que la condición $h \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ es necesaria y suficiente para que P sea monótono. Grafique los polinomios resultantes en los casos $h = \frac{1}{3}$ y $h = 3$ respectivamente.

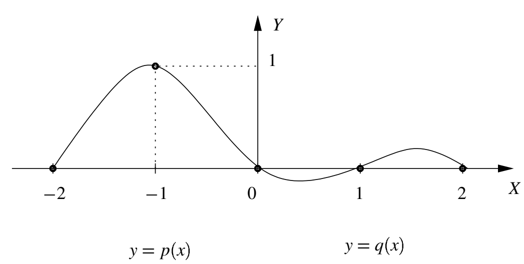
b) Si $h = 3$ encuentre el polinomio cúbico Q que interpola a los datos y que además tiene derivada nula en $x = 2$.

c) Encuentre un polinomio $\alpha(x)$ de grado 1 tal que $R(x) = \alpha(x)P(x) + (1 - \alpha(x))Q(x)$ interpole los datos y además tenga derivadas nulas en los dos extremos, $x = 0$ y $x = 2$.

Problema 3. Se busca $s : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definida por dos polinomios $p, q \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ de acuerdo a

$$s(x) = \begin{cases} p(x) & \text{si} \quad x \in [-2, 0] \\ q(x) & \text{si} \quad x \in (0, 2], \end{cases}$$

que sea de clase $\mathscr{C}^2([-2, 2])$ y que interpole a los datos $\{0, 1, 0, 0, 0\}$ en la malla $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. (Ver figura)



a) Haga un recuento del número de incógnitas escalares necesarias para conocer $s(x)$. Escriba (sin resolver) las ecuaciones que permitirían determinar los valores de estas incógnitas.

b) Sea a la derivada de s en el origen (o sea $a = s'(0)$). Encuentre las expresiones de $p(x)$ y $q(x)$ en función de a.

c) Determine el valor de la constante a de modo que la función $s(x)$ resultante satisfaga todas las propiedades requeridas. En este caso escriba explícitamente $s(x)$ en el intervalo $[-2,2]$.

Tiempo: **2h45**