Solución y Pauta P1 Control 2 MA33A, otoño 2004

a)

$$
\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-h)(x-2h)}{(0-h)(0-2h)} = \frac{(x-h)(x-2h)}{2h^2} \\
l_1(x) &= \frac{(x-0)(x-2h)}{(h-0)(h-2h)} = \frac{x(x-2h)}{-h^2} \\
l_2(x) &= \frac{(x-0)(x-h)}{(2h-0)(2h-h)} = \frac{x(x-h)}{2h^2} \qquad \text{(0.7ptos.)} \\
l_0'(x) &= \frac{1}{2h^2}(2x-3h); l_0'(0) = \frac{-3}{2h} \\
l_1'(x) &= \frac{-1}{h^2}(2x-2h); l_1'(0) = \frac{2}{h} \\
l_2'(x) &= \frac{1}{2h^2}(2x-h); l_2'(0) = \frac{-1}{2h} \qquad \text{(0.6ptos.)} \\
D_N(f) &= \frac{-3}{2h}f(0) + \frac{2}{h}f(h) - \frac{1}{2h}f(2h) \qquad \text{(0.7ptos.)} \\
&= \frac{-3f(0)+4f(h)-f(2h)}{2h} \\
&= \frac{4f(h)-3f(0)-f(2h)}{2h} \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{f(h)-f(0)}{h}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{f(2h)-f(h)}{h}\right]
\end{aligned}
$$

b) la precisión es ≥ 2 por construcción ¿será$\geq$ 3?. Veamos con $f(x) = x^3, f'(0) = 0$

$$
\begin{aligned}
D_N(x^3) &= \frac{3}{2}\frac{h^3}{h} - \frac{1}{2}\left[\frac{8h^3-h^3}{h}\right] \\
&= \frac{3}{2}h^2 - \frac{7}{2}h^2 = -2h^2 \qquad \text{(Calculo de la precisión (0.6 ptos.))}
\end{aligned}
$$

Luego la precisión igual a 2.

Formula del error:

$$f'(0) = D_N(f) + Kf^{(p)}_{(\xi)}h^q$$

Como la precisión es 2, $p = 3$ (determinación de p (0.4 ptos.))
Para $f(x) = x^3$ queda (Cálculo de K y q usando x^3 u otro polinomio cúbico (0.5 ptos.))

$$0 = -2h^2 + K \cdot 3!h^q$$

$$Kh^q = \frac{2}{6}h^2 = \frac{1}{3}h^2$$

$$\boxed{K = \frac{1}{3}, q = 2} \qquad \text{((0.5ptos.) determinar } k \text{ y } q\text{)}$$

$$\boxed{f'(0) = D_N(f) + \frac{1}{3}f'''(\xi)h^2}$$

c) Para integrar la EDO $u'(t) = F(u(t),t)$ basta con aproximar $u'(t) = D_N(u(t)) + 0(h^2)$

$$\Rightarrow F(u(t),t) = \frac{-3u(t) + 4u(t+h) - u(t+2h)}{2h} + 0(h^2)$$

(1 punto por usar D_N para aprox. $F(u(t),t)$))

Despejando $u(t+2h)$ se obtiene

$$u(t+2h) = -3u(t) + 4u(t+h) - 2hF(u(t),t) + 0(h^2)$$

Por lo tanto, se obtiene un método numérico

$$\begin{aligned} u(t+2h) &\approx u_{k+1} \\ u(t+h) &\approx u_k \\ u(t) &\approx u_{k-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{u_{k+1} = -3u_k + 4u_{k-1} - 2hF(u_{k-1}, t_{k-1})}$$

Es decir $A = -3, B = 4, C = -2h$ ((1.0ptos.) por despeje y reemplazar $u(kh) \approx u_{k+1}$ y, eliminar $0(h^2)$ en la expresión)

Solución y Pauta P2 Control 2

a)

$$\begin{aligned} A &= \int_t^{t+h} l_A, B = \int_t^{t+h} l_B \\ &= \int_t^{t+h} \left(\frac{-3}{2h}\right)\left(x - \left(t + \frac{2}{3}h\right)\right)dx \\ &= \frac{-3}{2h}\frac{(x-t)^2}{2}\int_t^{t+h} + \left(\frac{3}{2h}\cdot\frac{2h}{3}\right)\cdot(x-t)\int_t^{t+h} \\ &= \frac{-3}{4h}h^2 + h = h\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}h \qquad \text{(Calculo de } A \text{ y } B\text{(2.0 ptos))} \\ B &= \int_t^{t+h} \frac{3}{2h}(x-t) = \frac{3}{2h}\frac{(x-t)^2}{2}\int_t^{t+h} = \frac{3}{4}h \end{aligned}$$

$$\boxed{I_N(f) = \frac{1}{4}f(t) + \frac{3}{4}f(t + \frac{2h}{3})}$$

b) precisión ≥ 1 por construcción. Veamos si es ≥ 2

Sea $p(x) = (x-t)\left(x - \left(t + \frac{2}{3}h\right)\right)$ (puede ser otro)

$$I_N(p) = 0, \int_t^{t+h} p = \int_t^{t+h} (x-t)^2 - \frac{2h}{3}(x-t) = \frac{h^3}{3} - \frac{2h}{3}\cdot\frac{h^2}{3} = 0$$

Luego precisión ≥ 2.

Veamos si es ≥ 3; $q(x) = (x-t)(x - \left(x - \left(t + \frac{2}{3}h\right)\right)^2$

(precisión:2 (0.6 ptos.))

$$I_N(q) = 0; \int_t^{t+h} q > 0 \text{ ya que } q \text{ no cambia de signo en } [t, t+h]$$

Por lo tanto la precisión es 2.

Error: $E = \int_t^{t+h} f - I_N(f) = K f^n(\xi)$

donde $n = 3$ ya que la precisión es 2

(Forma del erros, y valor de n (0.4 ptos))

Para calcular K se usa $q(x)$

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+h} q &= \int_0^h x\left(x-\frac{2}{3}h\right)^2 = \int_0^h x\left[x^2-\frac{4}{3}hx+\frac{4}{9}h^2\right] \\
&= \frac{1}{4}h^4-\frac{4}{3}\frac{h^4}{3}+\frac{4}{9}\frac{h^4}{2} = \frac{h^4}{36}(9-16+8) \\
&= \frac{1}{36}h^4 \\
I_N(q) &= 0 \\
f^{(3)}(q) &= 3! = 6 \qquad\qquad \text{(Cálculo del resto (0.5 ptos.))} \\
K &= \frac{1}{6\cdot 36}h^4, \frac{36\times 6}{216} \\
E &= \frac{1}{216}f^{(3)}(\xi)h^4
\end{aligned}$$

En la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
u(t+h) &= u(t)+\int_t^{t+h} u'(s)ds \\
&= u(t)+I_N(u')+E(u') \qquad\qquad \text{(juntar lo anterior (0.5 ptos.))} \\
&= u(t)+h\left[\frac{1}{4}u'(t)+\frac{3}{4}u'\left(t+\frac{2h}{3}\right)\right]+0(h^4)
\end{aligned}$$

c) Usando el método de Euler se sabe que

$$u\left(t+\frac{h}{3}\right) = u(t)+u'(t)\frac{h}{3}+0(h^2) \qquad\qquad \text{(Error local Euler (0.5 ptos.))}$$

Como F es Lipschitziana

$$\underbrace{F\left(u\left(t+\frac{h}{3}\right),t+\frac{h}{3}\right)}_{u'\left(t+\frac{h}{3}\right)} = \underbrace{F\left(u(t)+m_1\frac{h}{3},t+\frac{h}{3}\right)}_{m_2}+0(h^2)$$

$$\Rightarrow m_2 = u'\left(t+\frac{h}{3}\right)+o(h^2) \qquad\qquad \text{(0.5ptos.)}$$

Taylor en torno a $t_m = t+h/3; t = t_m-h/3, t+\frac{2h}{3} = t_m+\frac{h}{3}$

$$\begin{aligned}
u(t) &= u(t_m)+u'(t_m)(-h/3)+\frac{u''(t_m)}{2}\left(\frac{h^2}{9}\right)+0(h^3) \\
u\left(t+\frac{2h}{3}\right) &= u(t_m)+u'(t_m)(h/3)+\frac{u''(t_m)}{2}\left(\frac{h^2}{9}\right)+0(h^3)
\end{aligned}$$

((0.5 ptos) 2 Taylors)

restando: $u(t)-u\left(t+\frac{2h}{3}\right)=u'(t_m)\left(\frac{-2h}{3}\right)+0(h^3)$

$$\Rightarrow u(t)+u'(t_m)\frac{2h}{3}=u\left(t+\frac{2h}{3}\right)+0(h^3) \qquad \text{(0.5ptos.)}$$

d) Usando la parte anterior

$$\begin{aligned} u(t)+m_2\frac{2h}{3} &= u(t)+u'(t_m)\frac{2h}{3}+0(h^2)\cdot\frac{2h}{3}+0(h^3) \\ &= u\left(t+\frac{2h}{3}\right)+0(h^3) \qquad \text{(0.5ptos.)} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} |m_1(Y_k)-m_1(Z_k)| &= |F(Y_k,t_k)-F(Z_k,t_k)| \\ &\leq LE_k \qquad \text{(2.3ptos.)} \\ |m_2(Y_k)-m_2(Z_k)| &= \left|F\left(Y_k+m_1\frac{h}{3},t_k+\frac{h}{3}\right)-F\left(Z_k+m_1\frac{h}{3},t_k+\frac{h}{3}\right)\right| \\ &\leq L\left\{E_k+\frac{h}{3}|m_1(Y_k)-m_1(Z_k)|\right\} \\ &\leq L\left\{E_k+\frac{h}{3}\cdot LE_k\right\}=L\left(1+\frac{Lh}{3}\right)E_k \quad \text{(0.4ptos.)} \\ |m_3(Y_k)-m_3(Z_k)| &= \left|F\left(Y_k+m_2\frac{2h}{3},t_k+\frac{2h}{3}\right)-F\left(Z_k+m_2\frac{2h}{3},t_k+\frac{2h}{3}\right)\right| \\ &\leq L\left\{E_k+\frac{2h}{3}|m_2(Y_k)-m_2(Z_k)|\right\} \\ &\leq L\left\{E_k+\frac{2h}{3}L\left(1+\frac{Lh}{3}\right)E_k\right\}=L\left[1+\frac{2h}{3}L+\frac{2h^2L^2}{9}\right]E_k \end{aligned}$$

(0.4ptos.)

$$\begin{aligned}
E_{k+1} &\leq E_k + \frac{1}{4}hLE_k + \frac{3}{4}hL\left[1+\frac{2hL}{3}+\frac{2h^2L^2}{9}\right]E_k + h|E_k| \\
&= \left(1+hL+\frac{h^2L^2}{2}+\frac{h^3L^3}{6}\right)E_k + h|E_k| \\
&\leq e^{Lh}E_k + h|E_k| \qquad \text{(0.4ptos.)}
\end{aligned}$$

De esta desigualdad se obtiene ("inducción")

$$E_k \leq e^{kLh}[|\eta| + kh\varepsilon]\varepsilon = \underset{k}{\text{Max}}\,|E_k|$$

(No se exigirá que lleguen hasta esta última desigualdad)

$$\begin{aligned}
m_3 &= F\left(u(t)+m_2\frac{2h}{3}, t+\frac{2h}{3}\right) \\
&= \underbrace{F\left(u\left(t+\frac{2h}{3}\right), t+\frac{2h}{3}\right)}_{u'\left(t+\frac{2h}{3}\right)} + 0(h^3) \qquad \text{(0.5ptos.)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(t+h) &= u(t) + h\left[\frac{1}{4}m_1 + \frac{3}{4}\underbrace{u'\left(t+\frac{2h}{3}\right)}_{=m_3+0(h^3)}\right] + 0(h^4) \\
&= u(t) + h\left[\frac{1}{4}m_1+\frac{3}{4}m_3\right] + 0(h^4) \\
&\Rightarrow \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \left[\frac{1}{4}m_1+\frac{3}{4}m_3\right] = 0(h^3) \\
&\Rightarrow \text{ consistencia. El método es de orden 3.}
\end{aligned}$$

(Usar lo previo para aplicarlo en la def. de consistencia (1.0 ptos.))

e) <u>Estabilidad</u>

$$\begin{aligned}
Y_{k+1} &= Y_k + h\left[\frac{1}{4}m_1(Y_k)+\frac{3}{4}m_3(Y_k)\right]; Y_0 \in I\!R \\
Z_{k+1} &= Z_k + h\left[\frac{1}{4}m_1(Z_k)+\frac{3}{4}m_3(Z_k)\right] +; Z_0 + \Delta t\varepsilon_k = Y_0 + \eta \\
&\text{sea } E_k = |Y_k - Z_k| \\
E_{k+1} &\leq E_k + \frac{1}{4}h|m_1(Y_k)-m_1(Z_k)| + \frac{3}{4}h|m_3(Y_k)-m_3(Z_k)| + h|\varepsilon_k|
\end{aligned}$$

(Definir ambas sucesiones y restar (0.5 ptos.))

f) En el caso particular

$$F(u,t) = -\alpha u$$
$$u_0 = 1$$

queda

$$m_1 = F(u_0, t_0) = -\alpha \qquad \text{(0.5ptos.)}$$
$$m_2 = F\left(u_0 + m_1\frac{h}{3}, t_0 + \frac{h}{3}\right) = -\alpha\left(u_0 + m_1\frac{h}{3}\right) \qquad \text{(0.5ptos.)}$$
$$= -\alpha\left(1 - \alpha\frac{h}{3}\right) = -\alpha + \frac{\alpha^2 h}{3}$$
$$m_3 = F\left(u_0 + m_2\frac{2h}{3}, t_0 + \frac{2h}{3}\right) = -\alpha\left(u_0 + m_2 \cdot \frac{2h}{3}\right) \qquad \text{(0.5ptos.)}$$
$$= -\alpha\left(1 + \frac{2h}{3}\left(-\alpha + \frac{\alpha^2 h}{3}\right)\right)$$
$$= -\alpha\left[1 - \frac{2}{3}\alpha h + \frac{2}{9}\alpha^2 h^2\right]$$

$$u_1 = u_0 + h\left[\frac{1}{4}m_1 + \frac{3}{4}m_3\right]$$
$$= 1 + h\left[\frac{1}{4}(-\alpha) + \frac{3}{4}\left(-\alpha + \frac{2}{3}\alpha^2 h - \frac{2}{9}\alpha^3 h^2\right)\right]$$
$$= 1 + h\left[-\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 h - \frac{1}{6}\alpha^3 h^2\right]$$

$$\boxed{u_1 = 1 - \alpha h + \frac{1}{2}\alpha^2 h^2 - \frac{1}{6}\alpha^3 h^3} \qquad \text{(0.5ptos.)}$$