MA33A- Cálculo Numérico
Solución control 3 - Otoño/2004

Problema 1.

a) En este caso, la discretización general es

$$-u_{i-1}+2u_i-u_{i+1}=h^2f(x_i),\quad \forall i=1,\dots,N$$

En nuestro caso queda

$$\begin{aligned}2u_1-u_2&=0\\ -u_1+2u_2-u_3&=h^2\\ -u_2+2u_3&=h^2\end{aligned}$$

En forma matricial se escribe

$$\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\&-1&2\end{pmatrix}U=h^2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

a) Integrando se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2}-\frac{d}{dx}\left(c(x)\frac{du}{dx}\right)dx&=\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2}f(x)dx\\ \left(c(x)\frac{du}{dx}\right)_{x_i+h/2}^{x_i-h/2}&=\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2}f(x)dx\\ \left(c(x)\frac{du}{dx}\right)(x_i-h/2)-\left(c(x)\frac{du}{dx}\right)(x_i+h/2)&=\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2}f(x)dx\end{aligned}$$

Para los térmionos de la izquierda se usa la indicación y queda

$$\begin{aligned}\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2}f(x)dx&\approx\left(c(x_i-\frac{h}{2})\frac{u(x_i-\frac{h}{2}+\frac{h}{2})-u(x_i-\frac{h}{2}-\frac{h}{2})}{h}\right)\\ &\quad-\left(c(x_i+\frac{h}{2})\frac{u(x_i+\frac{h}{2}+\frac{h}{2})-u(x_i+\frac{h}{2}-\frac{h}{2})}{h}\right)\\ &=c\left(c(x_i-\frac{h}{2})\frac{u(x_i)-u(x_i-h)}{h}\right)-\left(c(x_i+\frac{h}{2})\frac{u(x_i+h)-u(x_i)}{h}\right)\\ &\approx\left(c(x_i-\frac{h}{2})\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)-\left(c(x_i+\frac{h}{2})\frac{u_{i+1}-u_i}{h}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto el esquema numerico es

$$\left(c(x_i-\frac{h}{2})\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)-\left(c(x_i+\frac{h}{2})\frac{u_{i+1}-u_i}{h}\right)=\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2}f(x)dx$$

c) En este caso particular el método queda

$$\frac{u_i-u_{i-1}}{h}-\frac{u_{i+1}-u_i}{h}=\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2}f(x)dx$$

es decir

$$-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = h\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} f(x)dx$$

el cual aplicado de $i = 1$ hasta $i = 3$ queda

$$\begin{aligned} 2u_1 - u_2 &= 0 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 &= h^2\left(\frac{1}{2}\right) \\ -u_2 + 2u_3 &= h^2 \end{aligned}$$

En forma matricial se escribe

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{pmatrix} U = h^2 \begin{pmatrix} 0 \\ (\frac{1}{2}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

La única diferencia con el método de la parte (a) es que la fuerza $f(x)$ aporta un factor $1/2$ en lugar de 1 el nodo central.

Problema 2.

a1) **Metodo explícito.** Corresponde a la discretización hacia adelante en la derivada temporal, es decir

$$\frac{U^{j+1} - U^j}{\Delta t} + \frac{k}{\Delta x^2} AU^j = 0$$

despejando se obtiene

$$U_{ex}^{j+1} = (I - rA)U^j$$

a1) **Metodo implícito.** Corresponde a la discretización hacia atrás en la derivada temporal, es decir

$$\frac{U^{j+1} - U^j}{\Delta t} + \frac{k}{\Delta x^2} AU^{j+1} = 0$$

despejando se obtiene

$$(I + rA)U^{j+1} = U^j$$

es decir

$$U_{im}^{j+1} = (I + rA)^{-1}U^j$$

b) Por definición

$$\begin{aligned} U^{j+1} &= \theta U_{ex}^{j+1} + (1-\theta)U_{im}^{j+1} \\ &= \theta(I - rA)U^j + (1-\theta)(I + rA)^{-1}U^j \\ &= \left\{\theta(I - rA) + (1-\theta)(I + rA)^{-1}\right\}U^j \end{aligned}$$

Es decir $G = \theta(I - rA) + (1-\theta)(I + rA)^{-1}$

c) Si λ es un valor propio de A asociado al vector propio v se tiene que

$$\begin{aligned} Gv &= \theta(I - rA)v + (1-\theta)(I + rA)^{-1}v \\ &= \theta(v - r\lambda v) + (1-\theta)(I + rA)^{-1}v \\ &= \theta(1 - r\lambda)v + (1-\theta)(I + rA)^{-1}v. \end{aligned}$$

Para la matriz inversa conviene calcular

$$\begin{aligned}(I+rA)v=(1+r\lambda)v \quad &\Rightarrow \quad v=(1+r\lambda)(I+rA)^{-1}v\\ &\Rightarrow \quad (I+rA)^{-1}v=\frac{1}{1+r\lambda}v\end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión de arriba

$$\begin{aligned}Gv &= \theta(1-r\lambda)v+(1-\theta)(I+rA)^{-1}v\\ &= \theta(1-r\lambda)v+\frac{(1-\theta)}{1+r\lambda}v\\ &= \left\{\theta(1-r\lambda)+\frac{(1-\theta)}{1+r\lambda}\right\}v.\end{aligned}$$

d) Como

$$\lambda_G=f(\lambda)=\theta(1-r\lambda)+\frac{(1-\theta)}{1+r\lambda},$$

y f es decreciente en $\mathbb{R}_+$ los valores extremos de f son $f(0)=1$ es el máximo y $f(\rho)$ es el mínimo. Este valor es

$$\begin{aligned}f(\rho) &= \theta(1-r\rho)+\frac{(1-\theta)}{1+r\rho}\\ &= \frac{\theta(1-r^2\rho^2)+1-\theta}{1+r\rho}\\ &= \frac{1-\theta r^2\rho^2}{1+r\rho}\end{aligned}$$

El método será estable si se cumpe que

$$\frac{1-\theta r^2\rho^2}{1+r\rho}\geq -1$$

es decir

$$\theta r^2\rho^2-r\rho-2\leq 0$$

Si $\theta=0$ la ecuación es cierta para todo r. O se el método (implícito) es incondicionalmente estable.

Si $\theta>0$ la parábola siempre corta al eje de las x. Por lo tanto el método será condicionalmente estable en este caso. La condición CFL se encuentra de

$$r\leq\frac{1+\sqrt{1+8\theta}}{2\theta\rho}$$

En el caso $\theta=1$ la condición CFL es

$$r\leq\frac{2}{\rho}$$

Problema 3.

a) Como

$$\begin{aligned}Ax &= b\\ A\tilde{x}+E\tilde{x} &= b\end{aligned}$$

restando queda

$$A(x-\tilde{x}) = -E\tilde{x}$$

o sea

$$x-\tilde{x} = -A^{-1}E\tilde{x}$$

Tomando norma queda

$$\begin{aligned}
\|x-\tilde{x}\| &= \|-A^{-1}E\tilde{x}\| \\
&= \|A^{-1}E\tilde{x}\| \\
&\leq \|A^{-1}\|\,\|E\|\,\|\tilde{x}\|
\end{aligned}$$

b) Usando la indicación

$$\begin{aligned}
\|x-\tilde{x}\| &\leq \|A^{-1}\|\,\|E\|\,\|\tilde{x}\| \\
&\leq \|A^{-1}\|\,\|E\|\,(\|x-\tilde{x}\|+\|x\|)
\end{aligned}$$

de donde despejando

$$\left(1-\|A^{-1}\|\,\|E\|\right)\|x-\tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\|\,\|E\|\,\|x\|$$

c) Como $\kappa(A) = \|A^{-1}\|\,\|A\|$ y $E_R(A) = \frac{\|E\|}{\|A\|}$ resulta que $\|A^{-1}\|\,\|E\| = \kappa(A)E_R(A)$. Reemplazando arriba queda

$$(1-\kappa(A)E_R(A))\,\|x-\tilde{x}\| \leq \kappa(A)E_R(A)\,\|x\|$$

Si además $\kappa(A)E_R(A) \leq \frac{1}{2}$ entonces $(1-\kappa(A)E_R(A)) \geq \frac{1}{2}$ por lo tanto

$$\frac{1}{2}\|x-\tilde{x}\| \leq (1-\kappa(A)E_R(A))\,\|x-\tilde{x}\| \leq \kappa(A)E_R(A)\,\|x\|$$

de donde despejando queda

$$E_R(x) = \frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq 2\kappa(A)E_R(A)$$