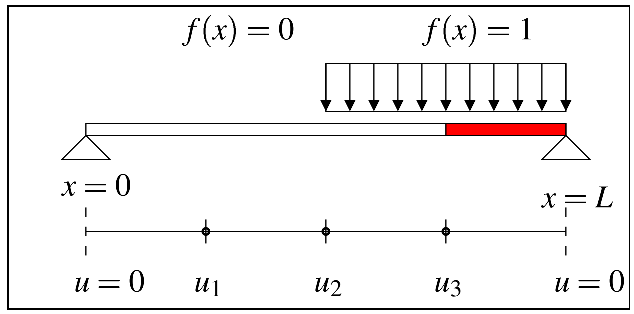
MA33A- Cálculo Numérico
Control 3 - Otoño/2004

Prof. Raul Gormaz
Jorge A. San Martín H.
Fecha: Jueves 17 de Junio de 2004.

Problema 1. La ecuación diferencial de una barra formada por dos materiales y sometida a carga transversal (ver figura) es

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(c(x)\frac{du}{dx}\right) &= f(x), \quad x \in (0,L) \\ u(0)=u(L) &= 0 \end{aligned}$$



donde $c(x)$ es una propiedad del material, dada por

$$c(x) = \begin{cases} c_1 & \text{si} \quad x \in [0, \frac{3}{4}L) \\ c_2 & \text{si} \quad x \in [\frac{3}{4}L, L] \end{cases}$$

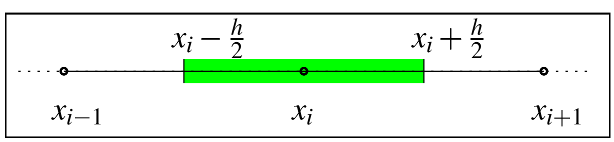
y $f(x)$ es la función "carga transversal" dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}L) \\ 1 & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2}L, L]. \end{cases}$$

El objetivo de este problema es proponer diferentes formulaciones discretizadas para resolver numéricamente el problema. Para ello consideremos una malla equiespaciada de paso $h = \frac{L}{4}$ y escribamos ecuaciones que permitan calcular $U = (u_1, u_2, u_3)^T$.

a) En el caso particular en que $c_1 = c_2 = 1$ (o sea, ambos materiales son iguales y $c(x) \equiv 1$) discretice la ecuación diferencial anterior usando la fórmula de 3 puntos centrada que aproxima la segunda derivada de u. Escriba la formulación como 3 ecuaciones escalares y en forma matricial.

b) Como en general $c(x)$ puede ser discontinua, se propone usar una estrategia especial para discretizar esta ecuación diferencial.
Dado un nodo x_i de la malla integre una vez ambos miembros de la ecuación diferencial entre $x_i - \frac{h}{2}$ y $x_i + \frac{h}{2}$.



Para aproximar los términos $\left(c\frac{du}{dx}\right)$ en los puntos de la forma $s = x_i \pm h/2$, use la expresión $c(s)\dfrac{u(s+h/2)-u(s-h/2)}{h}$.
Con esto demuestre que el esquema numérico es

$$c(x_i - \frac{h}{2})\frac{u_i - u_{i-1}}{h} - c(x_i + \frac{h}{2})\frac{u_{i+1}-u_i}{h} = \int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} f(x)dx$$

c) Para comparar este esquema numérico con el de la parte (a), vuelva a suponer que $c_1 = c_2 = 1$ y usando el esquema numérico encontrado en la parte (b) discretice la ecuación diferencial. Escriba la formulación como 3 ecuaciones escalares y en forma matricial. ¿Cual es la diferencia entre las dos formulaciones discretizadas?

d) Considere ahora el caso más general donde $c_1 \neq c_2$ (o sea hay cambio de material). Discretice la ecuación diferencial usando el esquema numérico encontrado en la parte (b). Escriba la formulación como 3 ecuaciones escalares y en forma matricial. Exprese sus ecuaciones en términos de c_1 y c_2.

Problema 2. Para aproximar el número π se propone usar una fórmula de integración numérica para cálcular la integral siguiente

$$I = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

a) Use las fórmulas simples del Trapecio y de Simpson para encontrar las estimaciones correspondientes del número π.

b) Sabiendo que $|f''(x)| \leq 2$ y $|f^{(4)}(x)| \leq 4!$ determine en cuantos intervalos de largo $h = 1/n$ se debe dividir $[0,1]$ de modo que el error entregado por las fórmulas del Trapecio y de Simpson compuestas entreguen el valor de π con un error inferior a $\delta = 4 \cdot 10^{-10}$.

Problema 3. Considere la fórmula de integración siguiente

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx Af(-a) + Bf(a) + Cf'(-a) + Df'(a)$$

donde $a > 0$.

a) Determine en función de a los coeficientes A, B, C y D de modo que la fórmula sea exacta para los polinomios del mayor grado posible.

b) Determine el valor de a tal que $C = D = 0$. Diga cual es entonces la fórmula de integración. ¿Que se puede decir del valor de a encontrado?

c) Si $a = 1$ encuentre una expresión del error de la fórmula de integración.

Tiempo: **2h30**