MA33A- Cálculo Numérico
Examen - Otoño 2004

Profs. Raúl GORMAZ
Jorge A. SAN MARTÍN H.
Fecha: Sabado 10 de Julio de 2004.

Problema 1. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= 1 \\ x+y+z &= 2 \\ 2x+2y+z &= 3 \end{aligned}$$

a) Escriba el método de Jacobi que resuelve el sistema anterior en forma iterativa. Pruebe el método haciendo tres iteraciones partiendo del punto $(x,y,z)^T = (1,1,1)^T$.

b) Calcule el radio espectral de la matriz J de iteración del método de Jacobi y demuestre que el método es convergente.

c) Escriba el método de Gauss-Seidel que resuelve el sistema en forma iterativa. Calcule el radio espectral de la matriz G de iteración de este método e indique que ocurre con la convergencia del método.
Indicación: en `SCILAB`, `inv([1 0 0 ;1 1 0;2 2 1])` vale `[1 0 0; -1 1 0 ; 0 -2 1 ]`

Problema 2.

a) Demuestre que si $f \in \mathscr{C}^\infty$ entonces para todo $a \in \mathbb{R}$ y $h > 0$ se cumple

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a) + O(h^2)$$

b) Usando la relación anterior con valores apropiados de a y h, demuestre que la solución de la ecuación diferencial $u'(t) = F(t, u(t))$ satisface

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \Delta t F(t + \tfrac{\Delta t}{2}, u(t + \tfrac{\Delta t}{2})) + O(\Delta t^3)$$

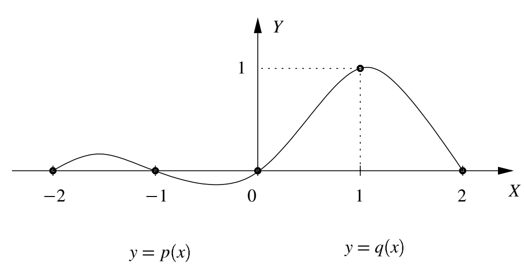
c) A partir de la relación anterior y sabiendo que F es lipschitziana, use una aproximación adecuada para encontrar un método numérico explícito de un paso y de orden 2 para la EDO.

d) Usando la ecuación diferencial test $u' = -\alpha u$ donde $\alpha > 0$, analice la estabilidad lineal del método.

Problema 3. Se busca $s\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ definida por dos polinomios $p, q \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ de acuerdo a

$$s(x) = \begin{cases} p(x) & \text{si} \quad x \in [-2,0] \\ q(x) & \text{si} \quad x \in (0,2], \end{cases}$$

que sea de clase $\mathscr{C}^2([-2,2])$ y que interpole a los datos $\{0,0,0,1,0\}$ en la malla $\{-2,-1,0,1,2\}$. (Ver figura)



a) Haga un recuento del número de incógnitas **escalares** necesarias para conocer $s(x)$. Escriba (sin resolver) las ecuaciones que permitirían determinar los valores de estas incógnitas.

b) Sea a la derivada de s en el origen (o sea $a = s'(0)$). Encuentre las expresiones de $p(x)$ y $q(x)$ en función de a.

c) Determine el valor de la constante a de modo que la función $s(x)$ resultante satisfaga todas las propiedades requeridas. En este caso escriba explícitamente $s(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$.

Tiempo: **2h45**