MA33A- Cálculo Numérico
PAUTA Control 1 - Primavera 2004

Profs. Raúl GORMAZ
Jorge A. SAN MARTÍN H.
Fecha: Jueves 26 de Agosto de 2004.

PROBLEMA 1

(a) Inspirándose de la identidad $Z_n - S = Z_n - S_n + S_n - S$ indique como el error e se puede dividir en un error de redondeo y un error de truncación. Diga para cada uno de estos dos errores, como se espera que sea su comportamiento cuando $n \to \infty$.

(a1) El término $Z_n - S_n$ ilustra la influencia de las operaciones aritmeticas en el computador respecto de las operaciones exactas, por lo que podemos decir que aquí tenemos representado el error de REDONDEO. Si el computador tuviera precisión infinita, este error sería cero. Si $n \to \infty$, esto es, si el numero de sumandos aumenta, el error de redondeo aumenta con n.

(a2) En el término $S_n - S$ se muestra la influencia de *truncar* un proceso infinito de límite. Se trata aquí del error de TRUNCACIÓN. Aquí, las operaciones en el computador no intervienen. Si $n \to \infty$, esto es, calculo la suma parcial con un mayor número de términos, los S_n convergen a S por lo tanto $S_n - S$ tiende a cero.

(b) Encuentre una cota del tipo $C \cdot n$ para la diferencia $|Z_n - S_n|$.

(b1) En general, al calcular la suma de reales $a_k = F(n+1-k)$ se obtiene la expresión

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} F(n+1-k) \prod_{j=1}^{n-k+1} \left(1 + \delta_{k,j}\right) \text{ donde } \left|\delta_{k,j}\right| \leq \varepsilon_m \forall k, j.$$

(b2) Pero los sumandos también contribuyen al error:

$$F(p) = 1 \oslash (p \odot p) = 1 \oslash \left(p^2(1+\delta_p)\right) = \frac{1}{p^2(1+\delta_p)}(1+\delta'_p) = f(p)\frac{(1+\delta'_p)}{(1+\delta_p)}$$

con $|\delta_p| \leq \varepsilon_m$ y $\left|\delta'_p\right| \leq \varepsilon_m$.

(b3) Combinando estas expresiones se obtiene

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} f(n+1-k)\frac{(1+\delta'_{n+1-k})}{(1+\delta_{n+1-k})} \prod_{j=1}^{n-k+1} \left(1+\delta_{k,j}\right)$$

Luego, por aplicación del lema de simplificación

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} f(n+1-k)(1+\Delta_k)$$

donde $|\Delta_k| \leq (n-k+1+2)\tilde{\varepsilon}_m$.
Reordenando se obtiene:

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} f(n+1-k) + \sum_{k=1}^{n} f(n+1-k)\Delta_k$$

$$Z_n = S_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_k}{(n+1-k)^2}.$$

Finalmente la constante C resulta de acotar el último término

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_k}{(n+1-k)^2}\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\Delta_k}{(n+1-k)^2}\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k+1+2)\tilde{\varepsilon}_m}{(n+1-k)^2} \\
&\leq \tilde{\varepsilon}_m \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k+1)+2}{(n+1-k)^2} \\
&\leq \tilde{\varepsilon}_m \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{(n-k+1)}{(n+1-k)^2} + \frac{2}{(n+1-k)^2} \right\} \\
&\leq 3\tilde{\varepsilon}_m
\end{aligned}
$$

y así, $C = 3\tilde{\varepsilon}_m$

(c) La cota de la cola de la serie es $\displaystyle\int_n^{\infty} \left(1/x^2\right) dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=n}^{\infty} = \frac{1}{n}$. Por lo tanto se obtiene la cota $T(n) = \dfrac{1}{n}$

(d) Debemos acotar $\mathrm{Error}(n) = R(n) + T(n) = \frac{1}{n} + Cn$. Para efectos prácticos, consideremos el problema en una variable continua x, así se minimizará $f(x) = \frac{1}{x} + Cx$.

Como $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + C$ es claro que el mínimo se produce para $x = 1/\sqrt{C} = \sqrt{\frac{1}{3\tilde{\varepsilon}_m}} = \sqrt{\frac{1}{4\cdot 10^{-16}}} = \frac{1}{2}10^8$.

En el mínimo, el error es $e = \sqrt{C} + \frac{C}{\sqrt{C}} = 2\sqrt{C} = 4\cdot 10^{-8}$, es decir,
se espera obtener 7 dígitos decimales correctos.

PROBLEMA 2

parte 1: La fórmula general del error de interpolación es:

$$e(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n).$$

En los caso de interpolación cuadrática y cúbica este error queda

$$\begin{aligned} e_2(x) &= \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-a)(x-b)(x-x_M) \\ e_3(x) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)(x-b)(x-x_1)(x-x_2) \end{aligned}$$

respectivamente.

Cálculo de las derivadas de f:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \\ f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{x^3} \\ f'''(x) &= -\frac{6}{x^4} \\ f^{iv}(x) &= \frac{4!}{x^5} \end{aligned}$$

Cálculo de los máximos de las derivadas importantes

$$\begin{aligned} \left|f^{(3)}(x)\right| &\leq 6 \\ \left|f^{(4)}(x)\right| &\leq 4! \end{aligned}$$

Parte 2: Cota del error en el caso cuadrático

$$\begin{aligned} |e_2(x)| &\leq \frac{6}{3!}\left|\underbrace{(x-a)(x-b)}_{\leq \frac{h^2}{4}}\underbrace{(x-x_M)}_{\leq \frac{h}{2}}\right| \\ &\leq \frac{h^3}{8} \end{aligned}$$

donde $h = b - a = \frac{1}{N}$.

Cota del error en el caso cúbico

$$\begin{aligned} |e_4(x)| &\leq \frac{4!}{4!}\left|\underbrace{(x-a)(x-b)}_{\leq \frac{h^2}{4}}\underbrace{(x-x_1)}_{\leq \frac{2h}{3}}\underbrace{(x-x_2)}_{\leq \frac{2h}{3}}\right| \\ &\leq \frac{h^4}{9} \end{aligned}$$

donde $h = b - a = \frac{1}{M}$.

Parte 3: Cálculo de N. En el primer caso, el error es menor o igual que 10^{-12} si

$$h^3 \leq 8 \cdot 10^{-12}$$

es decir

$$N^3 \geq \frac{1}{8} \cdot 10^{12}$$

o sea

$$N \geq \frac{1}{2} \cdot 10^4 = 5000$$

Cálculo de M. En el segundo caso, el error es menor o igual que 10^{-12} si

$$h^4 \leq 9 \cdot 10^{-12}$$

es decir

$$M^4 \geq \frac{1}{9} \cdot 10^{12}$$

o sea

$$M \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 10^3 \approx 570$$

La cantidad total de puntos de evaluación exacta de f en los casos (i) y (ii) son respectivamente

$$\begin{aligned} 2N+1 &\geq 10001 \\ 3M+1 &\geq \sqrt{3} \cdot 10^3 + 1 \approx 1700 \end{aligned}$$

Claramente es mejor la alternativa (ii) ya que requiere menos evaluaciones exactas de f que la (i).

PROBLEMA 3

(a) El polinomio $P(x)$ queda determinado por las condiciones $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$, $P(1) = -\Delta$ y $P'(1) = m$.

Estas condiciones generan la siguiente tabla de diferencias divididas:

$$
\begin{array}{ccccc}
x_i & f(x_i) & & & \\
0 & 0 & & & \\
 & & 0 & & \\
0 & 0 & & -\Delta & \\
 & & -\Delta & & m+2\Delta \\
1 & -\Delta & & m+\Delta & \\
 & & m & & \\
1 & -\Delta & & &
\end{array}
$$

Por lo tanto el polinomio P se puede escribir como

$$P(x) = 0 + 0x - \Delta x^2 + (m+2\Delta)x^2(x-1)$$

Simplificando queda

$$
\begin{aligned}
P(x) &= -\Delta x^2 + (m+2\Delta)x^2(x-1) \\
&= (m+2\Delta)x^3 - (m+3\Delta)x^2
\end{aligned}
$$

(b) El polinomio $Q(x)$ queda determinado por las condiciones $Q(1) = -\Delta$, $Q(2) = -\Delta$, $Q'(1) = m$ y $Q'(2) = -m$.

Estas condiciones generan la siguiente tabla de diferencias divididas:

$$
\begin{array}{ccccc}
x_i & f(x_i) & & & \\
1 & -\Delta & & & \\
 & & m & & \\
1 & -\Delta & & -m & \\
 & & 0 & & 0 \\
2 & -\Delta & & -m & \\
 & & -m & & \\
2 & -\Delta & & &
\end{array}
$$

Por lo tanto el polinomio Q se puede escribir como

$$Q(x) = -\Delta + m(x-1) - m(x-1)^2 + 0(x-1)^2(x-2)$$

Simplificando queda

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= -\Delta + m(x-1) - m(x-1)^2 \\
&= -\Delta + m(x-1)(2-x)
\end{aligned}
$$

(c) la función f construida como P en AB y Q en BC es continua y tiene su primera derivada continua. Lo que falta es que su segunda derivada sea continua en $x = 1$. Con esta condición calcularemos m.

La segunda derivada de P es

$$
\begin{aligned}
P''(x) &= 6(m+2\Delta)x - 2(m+3\Delta) \\
P''(1) &= 6(m+2\Delta) - 2(m+3\Delta) \\
&= 4m + 6\Delta
\end{aligned}
$$

La segunda derivada de Q es

$$\begin{aligned} Q''(x) &= -2m \\ Q''(1) &= -2m \end{aligned}$$

Igualando ambas derivadas se obtiene

$$4m + 6\Delta = -2m$$

de donde se deduce que $m = -\Delta$.

(d) Con el valor de m calculado anteriormente el polinomio Q queda

$$Q(x) = -\Delta - \Delta(x-1)(2-x)$$

por lo tanto en $x = 3/2$ se tiene

$$\begin{aligned} H &= -\Delta - \frac{1}{4}\Delta \\ &= -\frac{5}{4}\Delta. \end{aligned}$$