**MA33A- Cálculo Numérico**
**Control 1 - Primavera 2004**

Profs. Raúl GORMAZ
Jorge A. SAN MARTÍN H.
Fecha: Jueves 26 de Agosto de 2004.

## PROBLEMA 1

En este problema realizará un análisis del error relacionado con el **cálculo numérico** de la serie:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left( = \frac{\pi^2}{6} \right).$$

Para esto, denotemos por $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ a la suma parcial $n$-esima exacta y por $Z_n$ a la suma parcial calculada por el computador en un sistema $\mathbb{F}$ según el algoritmo siguiente (en el cual la suma se calcula con los sumandos ordenandos de menor a mayor):

$$\text{Tomar } Z_0 = 0 \text{ y luego para } k = 1, \dots, n \text{ se calcula } Z_k = Z_{k-1} \oplus F(n+1-k),$$

donde $F(k) = 1 \oslash (k \odot k)$ es la versión del computador para $f(k) = 1/k^2$.

De este modo el error en el **cálculo numérico** de la serie estará dado por la diferencia

$$e = |S - Z_n|$$

(a) (1pto) Inspirándose de la identidad $Z_n - S = Z_n - S_n + S_n - S$ indique como el error $e$ se puede dividir en un error de redondeo y un error de truncación. Diga para cada uno de estos dos errores, como se espera que sea su comportamiento cuando $n \to \infty$.

(b) (3ptos) Encuentre una cota del tipo $C \cdot n$ para la diferencia $|Z_n - S_n|$. Para ello recuerde que, *en clases se probó que para la suma de n números $a_j \in \mathbb{F},\ j = 1, \dots, n$ se obtuvo la expresión*

$$(\text{Suma calculada}) = \sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{j=1}^{n-k+1} \left(1 + \delta_{k,j}\right) \text{ donde } \left|\delta_{k,j}\right| \leq \varepsilon_m \forall k, j.$$

Aplique esta identidad a los reales $a_k = F(n+1-k)$, luego escriba $F(p)$ en términos de $f(p)$ (donde $p = n+1-k$). Combine estas expresiones, use el lema de simplificación y obtenga

$$Z_n = S_n + (\text{algo}), \qquad \text{donde } (\text{algo}) \leq C \cdot n.$$

Indique el valor de la constante $C$ que usted obtiene.

(c) (0.5pto) Encuentre una cota $T(n)$ de la diferencia $|S - S_n|$. Para ello recuerde que, en MA12A se vio que, la cola de la serie se puede acotar como $\sum_{k=n+1}^{\infty} (1/k^2) \leq \int_n^{\infty} \left(1/x^2\right) dx$.

(d) (1.5ptos) Encuentre un valor de $n$ óptimo que minimice la suma de las cotas encontradas anteriormente. (*Obs: puede minimizar $f(x) = Cx + T(x)$*). Estime cuantos términos de la serie se deben sumar y cuantos dígitos decimales correctos tendrá el resultado calculado si se trabaja en doble precisión. *Nota: Suponga que $3\tilde{\varepsilon}_m = 4 \cdot 10^{-16}$ y, de ser necesario, que $(\pi^2/6) \approx 1$.*

**PROBLEMA 2**

Considere la función $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1,2]$. Se desea interpolar esta función de modo que el error de interpolación sea inferior o igual a $10^{-12}$. Para ello se proponen dos alternativas de trabajo:

(i) El intervalo $[1,2]$ se divide en $N$ partes iguales y en cada sub-intervalo de largo $h = 1/N$ se interpola $f$ mediante un polinomio cuadrático usando los dos puntos extremos más el punto central del sub-intervalo.

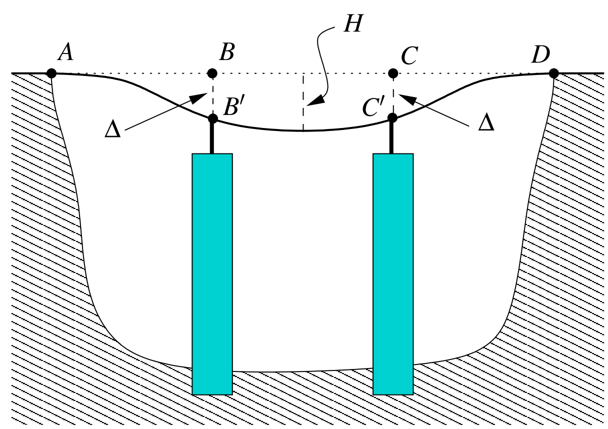
(ii) El intervalo $[1,2]$ se divide en $M$ partes iguales y en cada sub-intervalo de largo $h = 1/M$ se interpola $f$ mediante un polinomio cúbico usando los dos puntos extremos más los dos puntos que dividen al sub-intervalo en tres partes iguales.

Determine cotas inferiores de los valores de $N$ y $M$ que garantizan que el error de interpolación sea menor a $10^{-12}$. Indique además cuantas evaluaciones exactas se requieren en cada caso y cual de las dos alternativas requiere menos evaluaciones exactas de $f$.

*OBS: No se le está pidiendo encontrar los polinomios, solo se le pide decir cuantos polinomios se necesitan en cada caso.*

**PROBLEMA 3**

El puente "Ponticello" recientemente inaugurado, conecta los lados $A$ y $D$ de un río. La forma originalmente diseñada es una recta horizontal que une $A$ con $D$ y que se apoya en pilares en los puntos $B$ y $C$ (ver linea punteada en figura). Problemas de asentamiento del terreno producen un hundimiento de los pilares centrales en una misma cantidad $\Delta$. Se requiere calcular el hundimiento $H$ máximo del puente (el que por simetría ocurre en el centro) para así verificar que no se hallan sobrepasado los valores máximos admisibles indicados en la norma oficial de puentes (ISO-xxx).




El experto en puentes, Ingeniero Bridge, nos explica que la forma deformada del puente es una función $f(x)$ que solo puede tener discontinuidades a partir de su tercera derivada en los puntos de apoyo $B$ y $C$ (o sea $f \in \mathcal{C}^2$). Además, al no haber cargas transversales, en cada tramo la función coincide con un polinomio cúbico. Finalmente, nos explica que el puente está diseñado de modo que la pendiente de la curva en los extremos $A$ y $D$ sea siempre 0.

Llamaremos $P$, $Q$ y $R$ a los polinomios que representan a $f$ en los tramos $AB$, $BC$ y $CD$ respectivamente y supondremos que los puntos $A, B, C$ y $D$ están ubicados en la coordenadas $x$ iguales a $0, 1, 2$ y $3$ respectivamente.

(a) Sea $m \in \mathbb{R}$. Encuentre, en términos de $m$ y $\Delta$, la expresión del polinomio $P$ si se impone que $P'(1) = m$.

(b) Escriba la expresión del polinomio $Q$ en términos de $\Delta$ y $m$. (Indicación: use la simetría del problema)

(c) Calcule el valor de $m$ de modo que efectivamente la función $f$ determinada anteriormente cumpla las condiciones indicadas por el Ingeniero Bridge.

(d) Encuentre, en función de $\Delta$, la deformación máxima $H$ del puente.