Estudio sobre cotas para la amplitud del espectro Laplaciano sin signo de un grafo

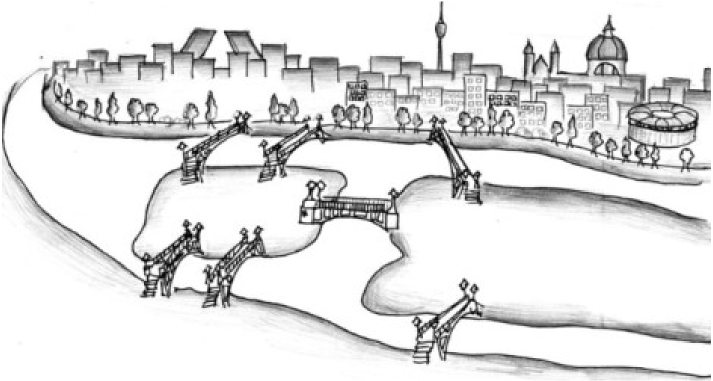
Laura Mayely Leal Chacón

Candidata a optar el grado de
Magíster en Ciencias Mención Matemáticas

Directora:
Dra. María Rosario Robbiano Bustamante

Antofagasta, Chile
Enero de 2018

[1] EULER, Leonhard. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Disponible en http://eulerarchive.maa.org.



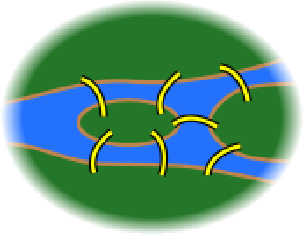
Dado el mapa de Königsberg, con el río Pregel dividiendo el plano en cuatro regiones distintas, que están unidas a través de los siete puentes,

[1] EULER, Leonhard. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Disponible en http://eulerarchive.maa.org.

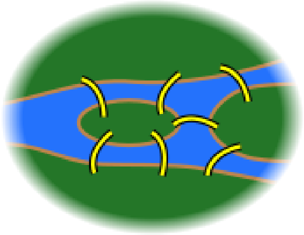
Dado el mapa de Königsberg, con el río Pregel dividiendo el plano en cuatro regiones distintas, que están unidas a través de los siete puentes, ¿es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes, recorriendo solo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida? [1]

[1] EULER, Leonhard. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Disponible en http://eulerarchive.maa.org.

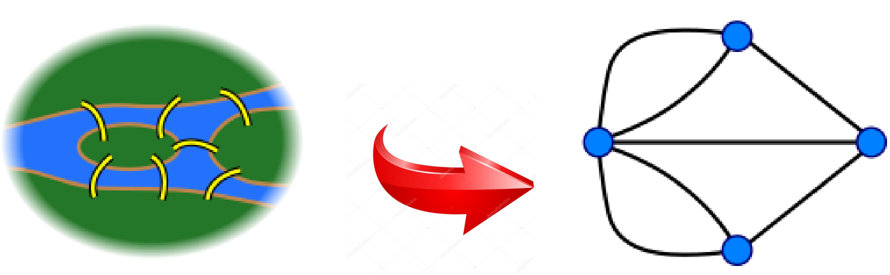
[2] A.E. Brouwer and W.H. Haemers. Spectra of Graphs. Springer, New York, 2012.



[2] A.E. Brouwer and W.H. Haemers. Spectra of Graphs. Springer, New York, 2012.



[2] A.E. Brouwer and W.H. Haemers. Spectra of Graphs. Springer, New York, 2012.



[2] A.E. Brouwer and W.H. Haemers. Spectra of Graphs. Springer, New York, 2012.

[2]

[2] A.E. Brouwer and W.H. Haemers. Spectra of Graphs. Springer, New York, 2012.

AGENDA

1. Preliminares
   - Notaciones
   - Definiciones
   - Propiedades
     - Matrices asociadas a un grafo G
     - ✓ A_G ✓ L_G ✓ Q_G
     - ✓ Espectro ✓ Amplitud
2. Distintas cotas para las amplitudes del espectro de matrices asociadas a un grafo
   - Cotas superiores
     - ✓ Para $s(A)$ de Mirsky
     - ✓ Para $s_L(G)$ de Chen & Das
     - ✓ Para $s_Q(G)$ (Establecida)
   - Cotas inferiores
     - ✓ Para $s(A)$ de Barnes & Hoffman
     - ✓ Para $s(A)$ de Jiang & Zhan
     - ✓ Para $s_Q(G)$ (Establecida)
3. Comparación
4. Conclusiones

Notaciones[3] y Propiedades[4−5]

1. $G = (V, E)$ es un grafo simple (sin loops) y no dirigido con:

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.
[4] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. A Textbook of Graphs Theory. Springer, New York, 2012.
[5] D.M. Cvetkovic, M. Doob, and H. Sachs. Spectra of Graphs Theory and Application. Springer, New York, 2012.

Notaciones[3] y Propiedades[4−5]

1. $G = (V, E)$ es un grafo simple (sin loops) y no dirigido con:
   - ✓ N° vértices $|V| = n$,

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.
[4] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. A Textbook of Graphs Theory. Springer, New York, 2012.
[5] D.M. Cvetkovic, M. Doob, and H. Sachs. Spectra of Graphs Theory and Application. Springer, New York, 2012.

Notaciones[3] y Propiedades[4−5]

1. $G = (V, E)$ es un grafo simple (sin loops) y no dirigido con:
   - ✓ N° vértices $|V| = n$,
   - ✓ N° aristas $|E| = m$.

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

[4] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. A Textbook of Graphs Theory. Springer, New York, 2012.

[5] D.M. Cvetkovic, M. Doob, and H. Sachs. Spectra of Graphs Theory and Application. Springer, New York, 2012.

Notaciones[3] y Propiedades[4–5]

1. $G = (V, E)$ es un grafo simple (sin loops) y no dirigido con:
   - ✓ N° vértices $|V| = n$,
   - ✓ N° aristas $|E| = m$.
2. Sea d_u el grado de $u \in V$.

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.
[4] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. A Textbook of Graphs Theory. Springer, New York, 2012.
[5] D.M. Cvetkovic, M. Doob, and H. Sachs. Spectra of Graphs Theory and Application. Springer, New York, 2012.

Notaciones[3] y Propiedades[4−5]

1. $G = (V, E)$ es un grafo simple (sin loops) y no dirigido con:
   - ✓ N° vértices $|V| = n$,
   - ✓ N° aristas $|E| = m$.
2. Sea d_u el grado de $u \in V$.
   - **a)** Si $d_u = 1$, entonces u es pendiente.

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

[4] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. A Textbook of Graphs Theory. Springer, New York, 2012.

[5] D.M. Cvetkovic, M. Doob, and H. Sachs. Spectra of Graphs Theory and Application. Springer, New York, 2012.

Notaciones[3] y Propiedades[4−5]

1. $G = (V, E)$ es un grafo simple (sin loops) y no dirigido con:
   - ✓ N° vértices $|V| = n$,
   - ✓ N° aristas $|E| = m$.
2. Sea d_u el grado de $u \in V$.
   - **a)** Si $d_u = 1$, entonces u es pendiente.
   - **b)** $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = \delta$.

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

[4] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. A Textbook of Graphs Theory. Springer, New York, 2012.

[5] D.M. Cvetkovic, M. Doob, and H. Sachs. Spectra of Graphs Theory and Application. Springer, New York, 2012.

Notaciones[3] y Propiedades[4−5]

1. $G = (V, E)$ es un grafo simple (sin loops) y no dirigido con:
   - ✓ N° vértices $|V| = n$,
   - ✓ N° aristas $|E| = m$.
2. Sea d_u el grado de $u \in V$.
   - **a)** Si $d_u = 1$, entonces u es pendiente.
   - **b)** $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = \delta$.
   - **c)** D_G es la matriz diagonal de grados.

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

[4] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. A Textbook of Graphs Theory. Springer, New York, 2012.

[5] D.M. Cvetkovic, M. Doob, and H. Sachs. Spectra of Graphs Theory and Application. Springer, New York, 2012.

Notaciones[3] y Propiedades[4−5]

1. $G = (V, E)$ es un grafo simple (sin loops) y no dirigido con:
   - ✓ N° vértices $|V| = n$,
   - ✓ N° aristas $|E| = m$.
2. Sea d_u el grado de $u \in V$.
   - **a)** Si $d_u = 1$, entonces u es pendiente.
   - **b)** $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = \delta$.
   - **c)** D_G es la matriz diagonal de grados.
   - **d)** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$.

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.
[4] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. A Textbook of Graphs Theory. Springer, New York, 2012.
[5] D.M. Cvetkovic, M. Doob, and H. Sachs. Spectra of Graphs Theory and Application. Springer, New York, 2012.

Notaciones[3] y Propiedades[4−5]

1. $G = (V, E)$ es un grafo simple (sin loops) y no dirigido con:
   - ✓ N° vértices $|V| = n$,
   - ✓ N° aristas $|E| = m$.
2. Sea d_u el grado de $u \in V$.
   - **a)** Si $d_u = 1$, entonces u es pendiente.
   - **b)** $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = \delta$.
   - **c)** D_G es la matriz diagonal de grados.
   - **d)** $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$.
3. $\|A\|_F^2$

[3]C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.
[4]R. Balakrishnan and K. Ranganathan. A Textbook of Graphs Theory. Springer, New York, 2012.
[5]D.M. Cvetkovic, M. Doob, and H. Sachs. Spectra of Graphs Theory and Application. Springer, New York, 2012.

Notaciones[3] y Propiedades[4−5]

1. $G = (V, E)$ es un grafo simple (sin loops) y no dirigido con:
   - ✓ N° vértices $|V| = n$,
   - ✓ N° aristas $|E| = m$.
2. Sea d_u el grado de $u \in V$.
   - **a)** Si $d_u = 1$, entonces u es pendiente.
   - **b)** $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = \delta$.
   - **c)** D_G es la matriz diagonal de grados.
   - **d)** $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$.
3. $\|A\|_F^2 = \begin{cases} \mathrm{tr}(A^* A) \\ \\ \\ \end{cases}$

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.
[4] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. A Textbook of Graphs Theory. Springer, New York, 2012.
[5] D.M. Cvetkovic, M. Doob, and H. Sachs. Spectra of Graphs Theory and Application. Springer, New York, 2012.

Notaciones[3] y Propiedades[4−5]

1. $G = (V, E)$ es un grafo simple (sin loops) y no dirigido con:
   - ✓ N° vértices $|V| = n$,
   - ✓ N° aristas $|E| = m$.
2. Sea d_u el grado de $u \in V$.
   - **a)** Si $d_u = 1$, entonces u es pendiente.
   - **b)** $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = \delta$.
   - **c)** D_G es la matriz diagonal de grados.
   - **d)** $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$.
3. $\|A\|_F^2 = \begin{cases} \mathrm{tr}(A^* A) \\ \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \end{cases}$

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

[4] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. A Textbook of Graphs Theory. Springer, New York, 2012.

[5] D.M. Cvetkovic, M. Doob, and H. Sachs. Spectra of Graphs Theory and Application. Springer, New York, 2012.

Notaciones[3] y Propiedades[4−5]

1. $G = (V, E)$ es un grafo simple (sin loops) y no dirigido con:
   - ✓ N° vértices $|V| = n$,
   - ✓ N° aristas $|E| = m$.
2. Sea d_u el grado de $u \in V$.
   - **a)** Si $d_u = 1$, entonces u es pendiente.
   - **b)** $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = \delta$.
   - **c)** D_G es la matriz diagonal de grados.
   - **d)** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$.
3. $$\|A\|_F^2 = \begin{cases} \operatorname{tr}(A^*A) \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\min\{s,t\}} \sigma_i^2(A) \end{cases}$$

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

[4] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. A Textbook of Graphs Theory. Springer, New York, 2012.

[5] D.M. Cvetkovic, M. Doob, and H. Sachs. Spectra of Graphs Theory and Application. Springer, New York, 2012.

Notaciones[3] y Propiedades[4-5]

1. $G = (V, E)$ es un grafo simple (sin loops) y no dirigido con:
   - ✓ N° vértices $|V| = n$,
   - ✓ N° aristas $|E| = m$.
2. Sea d_u el grado de $u \in V$.
   - **a)** Si $d_u = 1$, entonces u es pendiente.
   - **b)** $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = \delta$.
   - **c)** D_G es la matriz diagonal de grados.
   - **d)** $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$.
3. $$\|A\|_F^2 = \begin{cases} \operatorname{tr}(A^* A) \\ \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \\ \sum_{i=1}^{\min\{s,t\}} \sigma_i^2(A) \end{cases}$$
4. $$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

[4] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. A Textbook of Graphs Theory. Springer, New York, 2012.

[5] D.M. Cvetkovic, M. Doob, and H. Sachs. Spectra of Graphs Theory and Application. Springer, New York, 2012.

Notaciones[3] y Propiedades[4−5]

1. $G = (V, E)$ es un grafo simple (sin loops) y no dirigido con:
   - ✓ N° vértices $|V| = n$,
   - ✓ N° aristas $|E| = m$.
2. Sea d_u el grado de $u \in V$.
   - **a)** Si $d_u = 1$, entonces u es pendiente.
   - **b)** $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = \delta$.
   - **c)** D_G es la matriz diagonal de grados.
   - **d)** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$.
3. $$\|A\|_F^2 = \begin{cases} \text{tr}(A^*A) \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\text{mín}\{s,t\}} \sigma_i^2(A) \end{cases}$$
4. $$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

[4] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. A Textbook of Graphs Theory. Springer, New York, 2012.

[5] D.M. Cvetkovic, M. Doob, and H. Sachs. Spectra of Graphs Theory and Application. Springer, New York, 2012.

Notaciones[3] y Propiedades[4−5]

1. $G = (V, E)$ es un grafo simple (sin loops) y no dirigido con:
   - ✓ N° vértices $|V| = n$,
   - ✓ N° aristas $|E| = m$.
2. Sea d_u el grado de $u \in V$.
   - **a)** Si $d_u = 1$, entonces u es pendiente.
   - **b)** $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = \delta$.
   - **c)** D_G es la matriz diagonal de grados.
   - **d)** $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$.
3. $$\|A\|_F^2 = \begin{cases} \operatorname{tr}(A^* A) \\ \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \\ \sum_{i=1}^{\text{mín}\{s,t\}} \sigma_i^2(A) \end{cases}$$
4. $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$
5. Si A es simétrica,

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

[4] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. A Textbook of Graphs Theory. Springer, New York, 2012.

[5] D.M. Cvetkovic, M. Doob, and H. Sachs. Spectra of Graphs Theory and Application. Springer, New York, 2012.

Notaciones[3] y Propiedades[4-5]

1. $G = (V, E)$ es un grafo simple (sin loops) y no dirigido con:
   - ✓ N° vértices $|V| = n$,
   - ✓ N° aristas $|E| = m$.
2. Sea d_u el grado de $u \in V$.
   - **a)** Si $d_u = 1$, entonces u es pendiente.
   - **b)** $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = \delta$.
   - **c)** D_G es la matriz diagonal de grados.
   - **d)** $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$.
3. $\|A\|_F^2 = \begin{cases} \operatorname{tr}(A^* A) \\ \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \\ \sum_{i=1}^{\min\{s,t\}} \sigma_i^2(A) \end{cases}$
4. $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$
5. Si A es simétrica,

   $$2m = \operatorname{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

---

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

[4] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. A Textbook of Graphs Theory. Springer, New York, 2012.

[5] D.M. Cvetkovic, M. Doob, and H. Sachs. Spectra of Graphs Theory and Application. Springer, New York, 2012.

Matriz de adyacencia[3]. Espectro y amplitud[6]

La matriz de adyacencia de G,

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

[6] D. Gregory, D. Heshkowitz, and S. Kirkland. The spread of the spectrum of a graph. Linear Algebra Appl, 332-334:23-58, 2001

Matriz de adyacencia[3]. Espectro y amplitud[6]

La matriz de adyacencia de G, $A_G = (a_{ij})_{n\times n}$,

[3]C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

[6]D. Gregory, D. Heshkowitz, and S. Kirkland. The spread of the spectrum of a graph. Linear Algebra Appl, 332-334:23-58, 2001

Matriz de adyacencia[3]. Espectro y amplitud[6]

La matriz de adyacencia de G, $A_G = (a_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ & \end{cases}$$

[3]C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

[6]D. Gregory, D. Heshkowitz, and S. Kirkland. The spread of the spectrum of a graph. Linear Algebra Appl, 332-334:23-58, 2001

Matriz de adyacencia[3]. Espectro y amplitud[6]

La matriz de adyacencia de G, $A_G = (a_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G), \end{cases}$$

[3]C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

[6]D. Gregory, D. Heshkowitz, and S. Kirkland. The spread of the spectrum of a graph. Linear Algebra Appl, 332-334:23-58, 2001

Matriz de adyacencia[3]. Espectro y amplitud[6]

La matriz de adyacencia de G, $A_G = (a_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G), \end{cases}$$

con espectro

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

[6] D. Gregory, D. Heshkowitz, and S. Kirkland. The spread of the spectrum of a graph. Linear Algebra Appl, 332-334:23-58, 2001

Matriz de adyacencia[3]. Espectro y amplitud[6]

La matriz de adyacencia de G, $A_G = (a_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G), \end{cases}$$

con espectro

$$\sigma(G) : \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n,$$

[3]C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

[6]D. Gregory, D. Heshkowitz, and S. Kirkland. The spread of the spectrum of a graph. Linear Algebra Appl, 332-334:23-58, 2001

Matriz de adyacencia[3]. Espectro y amplitud[6]

La matriz de adyacencia de G, $A_G = (a_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G), \end{cases}$$

con espectro

$$\sigma(G) : \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n,$$

y amplitud definida como:

[3]C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

[6]D. Gregory, D. Heshkowitz, and S. Kirkland. The spread of the spectrum of a graph. Linear Algebra Appl, 332-334:23-58, 2001

Matriz de adyacencia[3]. Espectro y amplitud[6]

La matriz de adyacencia de G, $A_G = (a_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G), \end{cases}$$

con espectro

$$\sigma(G) : \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n,$$

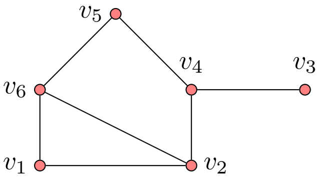
y amplitud definida como:

$$s_A(G) = s(G) = \lambda_1 - \lambda_n.$$

[3] C. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. Siam, 2000.

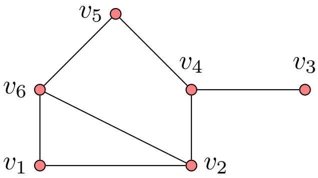
[6] D. Gregory, D. Heshkowitz, and S. Kirkland. The spread of the spectrum of a graph. Linear Algebra Appl, 332-334:23-58, 2001

Ejemplo: Matriz de adyacencia del grafo G



Grafo G

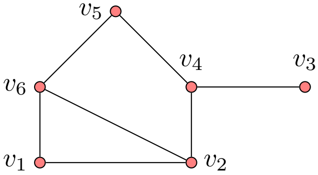
Ejemplo: Matriz de adyacencia del grafo G



Grafo G

$$A_G = A_G^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

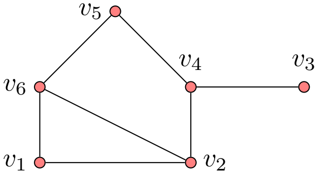
Ejemplo: Matriz de adyacencia del grafo G



Grafo G

$$A_G = A_G^T = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \hookleftarrow v_1 \\ \hookleftarrow v_2 \\ \hookleftarrow v_3 \\ \hookleftarrow v_4 \\ \hookleftarrow v_5 \\ \hookleftarrow v_6 \end{array} \end{array}$$

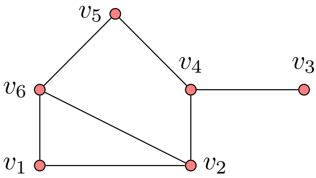
Ejemplo: Matriz de adyacencia del grafo G



Grafo G

$$A_G = A_G^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} \hookleftarrow v_1 & \Rightarrow d_1 = 2 \\ \hookleftarrow v_2 & \Rightarrow d_2 = 3 \\ \hookleftarrow v_3 & \Rightarrow d_3 = 1 \\ \hookleftarrow v_4 & \Rightarrow d_4 = 3 \\ \hookleftarrow v_5 & \Rightarrow d_5 = 2 \\ \hookleftarrow v_6 & \Rightarrow d_6 = 3 \end{array}$$

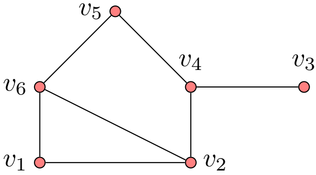
Ejemplo: Matriz de adyacencia del grafo G



Grafo G

$$A_G = A_G^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} \hookleftarrow v_1 & \Rightarrow d_1 = 2 \\ \hookleftarrow v_2 & \Rightarrow d_2 = 3 \\ \hookleftarrow v_3 & \Rightarrow d_3 = 1 \\ \hookleftarrow v_4 & \Rightarrow d_4 = 3 \\ \hookleftarrow v_5 & \Rightarrow d_5 = 2 \\ \hookleftarrow v_6 & \Rightarrow d_6 = 3 \\ \hline & +d_{i_{1:6}} \end{array}$$

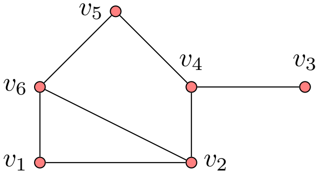
Ejemplo: Matriz de adyacencia del grafo G



Grafo G

$$A_G = A_G^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} \hookleftarrow v_1 & \Rightarrow d_1 = 2 \\ \hookleftarrow v_2 & \Rightarrow d_2 = 3 \\ \hookleftarrow v_3 & \Rightarrow d_3 = 1 \\ \hookleftarrow v_4 & \Rightarrow d_4 = 3 \\ \hookleftarrow v_5 & \Rightarrow d_5 = 2 \\ \hookleftarrow v_6 & \Rightarrow d_6 = 3 \\ \hline & +d_{i_{1:6}} = 14 \end{array}$$

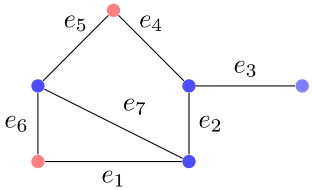
Ejemplo: Matriz de adyacencia del grafo G



Grafo G

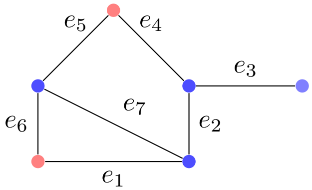
$$A_G = A_G^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lll} \hookleftarrow v_1 & \Rightarrow d_1 = 2 & \\ \hookleftarrow v_2 & \Rightarrow d_2 = 3 & \\ \hookleftarrow v_3 & \Rightarrow d_3 = 1 & \hookrightarrow \delta \text{ “Pendiente”} \\ \hookleftarrow v_4 & \Rightarrow d_4 = 3 & \\ \hookleftarrow v_5 & \Rightarrow d_5 = 2 & \\ \hookleftarrow v_6 & \Rightarrow d_6 = 3 & \hookrightarrow \Delta \\ \hline & +d_{i_{1:6}} = 14 & \hookrightarrow 2m \Rightarrow m = 7 \end{array}$$

Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G



Grafo G

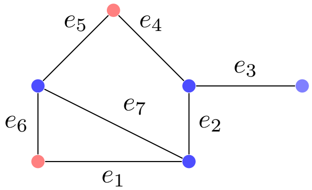
Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G



Grafo G

Espectro

Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G

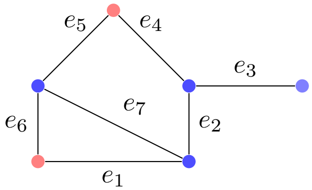


Grafo G

Espectro

$$\sigma(G) = \begin{cases} \lambda_1 = 2{,}5395, & \lambda_2 = 1{,}0825, \\ \lambda_3 = 0{,}2611, & \lambda_4 = -0{,}5406, \\ \lambda_5 = -1{,}2061, & \lambda_6 = -2{,}1364. \end{cases}$$

Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G



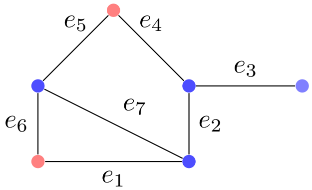
Grafo G

Espectro

$$\sigma(G) = \begin{cases} \lambda_1 = 2{,}5395, & \lambda_2 = 1{,}0825, \\ \lambda_3 = 0{,}2611, & \lambda_4 = -0{,}5406, \\ \lambda_5 = -1{,}2061, & \lambda_6 = -2{,}1364. \end{cases}$$

Amplitud

Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G



Grafo G

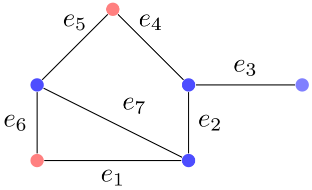
Espectro

$$\sigma(G) = \begin{cases} \lambda_1 = 2{,}5395, & \lambda_2 = 1{,}0825, \\ \lambda_3 = 0{,}2611, & \lambda_4 = -0{,}5406, \\ \lambda_5 = -1{,}2061, & \lambda_6 = -2{,}1364. \end{cases}$$

Amplitud

$$s(G) = \lambda_1 - \lambda_6$$

Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G



Grafo G

Espectro

$$\sigma(G) = \begin{cases} \lambda_1 = 2{,}5395, \quad \lambda_2 = 1{,}0825, \\ \lambda_3 = 0{,}2611, \quad \lambda_4 = -0{,}5406, \\ \lambda_5 = -1{,}2061, \quad \lambda_6 = -2{,}1364. \end{cases}$$

Amplitud

$$s(G) = \lambda_1 - \lambda_6 = \begin{cases} 2{,}5395 \; + \\ 2{,}1364 \\ \hline 4{,}6759 \end{cases}$$

Matriz Laplaciana[7]. Espectro y amplitud[8]

[7] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[8] R. Grone and Merris R. The Laplacian spectrum of a graph. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 11:218-230, 1990.

Matriz Laplaciana[7]. Espectro y amplitud[8]

La matriz Laplaciana de G,

[7]D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[8]R. Grone and Merris R. The Laplacian spectrum of a graph. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 11:218-230, 1990.

Matriz Laplaciana[7]. Espectro y amplitud[8]

La matriz Laplaciana de G, $L_G = (\ell_{ij})_{n\times n}$,

[7]D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[8]R. Grone and Merris R. The Laplacian spectrum of a graph. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 11:218-230, 1990.

Matriz Laplaciana[7]. Espectro y amplitud[8]

La matriz Laplaciana de G, $L_G = (\ell_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$\ell_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ & \\ & \end{cases}$$

[7] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[8] R. Grone and Merris R. The Laplacian spectrum of a graph. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 11:218-230, 1990.

Matriz Laplaciana[7]. Espectro y amplitud[8]

La matriz Laplaciana de G, $L_G = (\ell_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$\ell_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \\ \end{cases}$$

[7] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[8] R. Grone and Merris R. The Laplacian spectrum of a graph. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 11:218-230, 1990.

Matriz Laplaciana[7]. Espectro y amplitud[8]

La matriz Laplaciana de G, $L_G = (\ell_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$\ell_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \\ d_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

[7]D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[8]R. Grone and Merris R. The Laplacian spectrum of a graph. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 11:218-230, 1990.

Matriz Laplaciana[7]. Espectro y amplitud[8]

La matriz Laplaciana de G, $L_G = (\ell_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$\ell_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \\ d_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

con espectro

[7] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[8] R. Grone and Merris R. The Laplacian spectrum of a graph. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 11:218-230, 1990.

Matriz Laplaciana[7]. Espectro y amplitud[8]

La matriz Laplaciana de G, $L_G = (\ell_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$\ell_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \\ d_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

con espectro

$$\sigma(L_G) : \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n = 0,$$

[7]D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[8]R. Grone and Merris R. The Laplacian spectrum of a graph. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 11:218-230, 1990.

Matriz Laplaciana[7]. Espectro y amplitud[8]

La matriz Laplaciana de G, $L_G = (\ell_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$\ell_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \\ d_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

con espectro

$$\sigma(L_G) : \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n = 0,$$

y posibles amplitudes

[7] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[8] R. Grone and Merris R. The Laplacian spectrum of a graph. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 11:218-230, 1990.

Matriz Laplaciana[7]. Espectro y amplitud[8]

La matriz Laplaciana de G, $L_G = (\ell_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$\ell_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \\ d_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

con espectro

$$\sigma(L_G) : \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n = 0,$$

y posibles amplitudes

$$s(L_G) = \mu_1$$

[7]D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[8]R. Grone and Merris R. The Laplacian spectrum of a graph. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 11:218-230, 1990.

Matriz Laplaciana[7]. Espectro y amplitud[8]

La matriz Laplaciana de G, $L_G = (\ell_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$\ell_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \\ d_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

con espectro

$$\sigma(L_G) : \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n = 0,$$

y posibles amplitudes

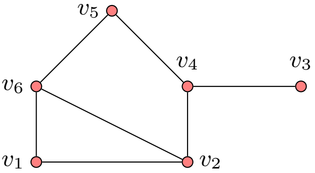
$$s(L_G) = \mu_1 \quad \text{y} \quad s_L(G) = \mu_1 - \mu_{n-1}.$$

[7] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[8] R. Grone and Merris R. The Laplacian spectrum of a graph. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 11:218-230, 1990.

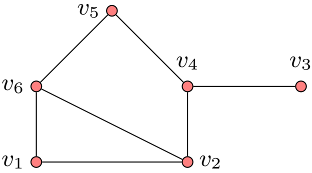
Ejemplo: Matriz Laplaciana del grafo G

Ejemplo: Matriz Laplaciana del grafo G



Grafo G

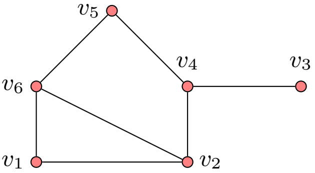
Ejemplo: Matriz Laplaciana del grafo G



Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{L_G}$$

Ejemplo: Matriz Laplaciana del grafo G

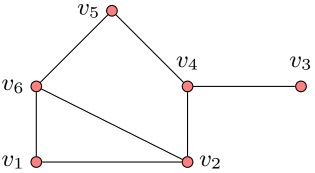


Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{L_G}$$

$$L_G =$$

Ejemplo: Matriz Laplaciana del grafo G

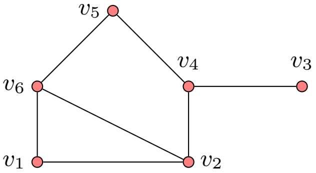


Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{L_G}$$

$$L_G = \overbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}}^{D_G}$$

Ejemplo: Matriz Laplaciana del grafo G

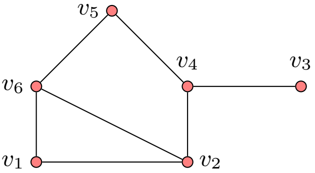


Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{L_G}$$

$$L_G = \overbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}}^{D_G} -$$

Ejemplo: Matriz Laplaciana del grafo G

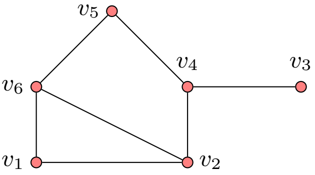


Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{L_G}$$

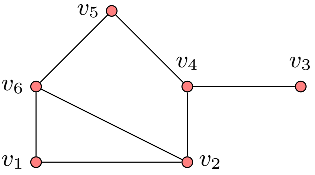
$$L_G = \overbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}}^{D_G} - \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}}^{A_G}$$

Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G



Grafo G

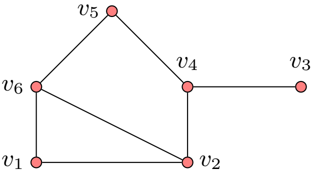
Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G



Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{L_G}$$

Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G

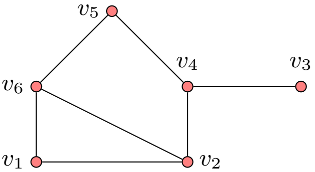


Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{L_G}$$

Espectro

Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G



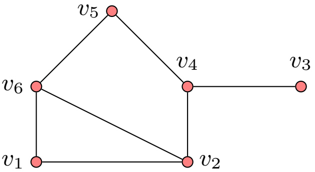
Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{L_G}$$

Espectro

$$\sigma(L_G) = \begin{cases} \mu_1 = 4{,}8912, & \mu_2 = 3{,}7046, \\ \mu_3 = 3{,}0000, & \mu_4 = 1{,}6826, \\ \mu_5 = 0{,}7216, & \mu_6 = 0 \end{cases}$$

Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G



Grafo G

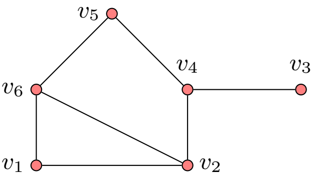
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{L_G}$$

Espectro

$$\sigma(L_G) = \begin{cases} \mu_1 = 4{,}8912, & \mu_2 = 3{,}7046, \\ \mu_3 = 3{,}0000, & \mu_4 = 1{,}6826, \\ \mu_5 = 0{,}7216, & \mu_6 = 0 \end{cases}$$

Amplitud

Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G



Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{L_G}$$

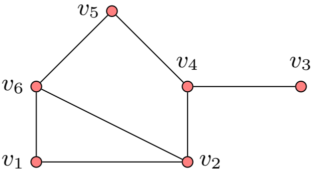
Espectro

$$\sigma(L_G) = \begin{cases} \mu_1 = 4{,}8912, & \mu_2 = 3{,}7046, \\ \mu_3 = 3{,}0000, & \mu_4 = 1{,}6826, \\ \mu_5 = 0{,}7216, & \mu_6 = 0 \end{cases}$$

Amplitud

$$s_L(G) = \mu_1 - \mu_5$$

Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G



Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{L_G}$$

Espectro

$$\sigma(L_G) = \begin{cases} \mu_1 = 4{,}8912, & \mu_2 = 3{,}7046, \\ \mu_3 = 3{,}0000, & \mu_4 = 1{,}6826, \\ \mu_5 = 0{,}7216, & \mu_6 = 0 \end{cases}$$

Amplitud

$$s_L(G) = \mu_1 - \mu_5 = \left\{ \begin{array}{r} 4{,}8912 \; - \\ 0{,}7216 \\ \hline 4{,}1696 \end{array} \right.$$

Matriz Laplaciana sin signo[9]. Espectro y amplitud[10]

[9]D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[10]M. Liu and B. Liu. The signless Laplacian spread. Linear Algebra Appl, 432:505-514, 2010.

Matriz Laplaciana sin signo[9]. Espectro y amplitud[10]

La matriz Laplaciana sin signo de G,

[9] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[10] M. Liu and B. Liu. The signless Laplacian spread. Linear Algebra Appl, 432:505-514, 2010.

Matriz Laplaciana sin signo[9]. Espectro y amplitud[10]

La matriz Laplaciana sin signo de G, $Q_G = (q_{ij})_{n\times n}$,

[9] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[10] M. Liu and B. Liu. The signless Laplacian spread. Linear Algebra Appl, 432:505-514, 2010.

Matriz Laplaciana sin signo[9]. Espectro y amplitud[10]

La matriz Laplaciana sin signo de G, $Q_G = (q_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ & \\ & \end{cases}$$

[9] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[10] M. Liu and B. Liu. The signless Laplacian spread. Linear Algebra Appl, 432:505-514, 2010.

Matriz Laplaciana sin signo[9]. Espectro y amplitud[10]

La matriz Laplaciana sin signo de G, $Q_G = (q_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \end{cases}$$

[9] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[10] M. Liu and B. Liu. The signless Laplacian spread. Linear Algebra Appl, 432:505-514, 2010.

Matriz Laplaciana sin signo[9]. Espectro y amplitud[10]

La matriz Laplaciana sin signo de G, $Q_G = (q_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \\ d_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

[9] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[10] M. Liu and B. Liu. The signless Laplacian spread. Linear Algebra Appl, 432:505-514, 2010.

Matriz Laplaciana sin signo[9]. Espectro y amplitud[10]

La matriz Laplaciana sin signo de G, $Q_G = (q_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \\ d_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

con espectro

[9] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[10] M. Liu and B. Liu. The signless Laplacian spread. Linear Algebra Appl, 432:505-514, 2010.

Matriz Laplaciana sin signo[9]. Espectro y amplitud[10]

La matriz Laplaciana sin signo de G, $Q_G = (q_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \\ d_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

con espectro

$$\sigma(Q_G) : q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_n,$$

[9] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[10] M. Liu and B. Liu. The signless Laplacian spread. Linear Algebra Appl, 432:505-514, 2010.

Matriz Laplaciana sin signo[9]. Espectro y amplitud[10]

La matriz Laplaciana sin signo de G, $Q_G = (q_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \\ d_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

con espectro

$$\sigma(Q_G) : q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_n,$$

y amplitud definida como:

[9] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[10] M. Liu and B. Liu. The signless Laplacian spread. Linear Algebra Appl, 432:505-514, 2010.

Matriz Laplaciana sin signo[9]. Espectro y amplitud[10]

La matriz Laplaciana sin signo de G, $Q_G = (q_{ij})_{n\times n}$, es dada por

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \\ d_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

con espectro

$$\sigma(Q_G) : q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_n,$$

y amplitud definida como:

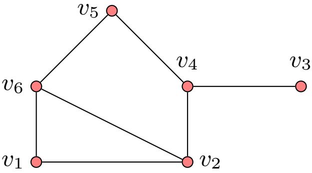
$$s(Q_G) = s_Q(G) = q_1 - q_n.$$

[9] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. Linear Algebra Appl, 43:155-171, 2007.

[10] M. Liu and B. Liu. The signless Laplacian spread. Linear Algebra Appl, 432:505-514, 2010.

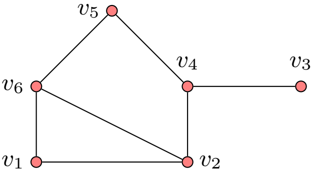
Ejemplo: Matriz Laplaciana sin signo del grafo G

Ejemplo: Matriz Laplaciana sin signo del grafo G



Grafo G

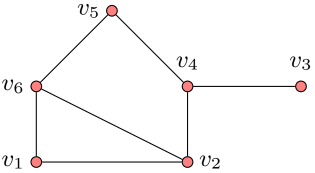
Ejemplo: Matriz Laplaciana sin signo del grafo G



Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{Q_G}$$

Ejemplo: Matriz Laplaciana sin signo del grafo G

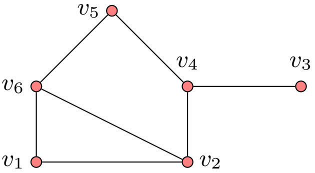


Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{Q_G}$$

$$Q_G =$$

Ejemplo: Matriz Laplaciana sin signo del grafo G

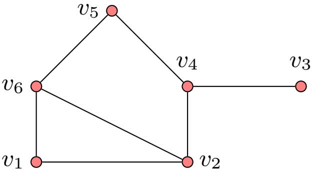


Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{Q_G}$$

$$Q_G = \overbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}}^{D_G}$$

Ejemplo: Matriz Laplaciana sin signo del grafo G

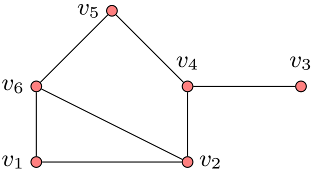


Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{Q_G}$$

$$Q_G = \overbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}}^{D_G} +$$

Ejemplo: Matriz Laplaciana sin signo del grafo G

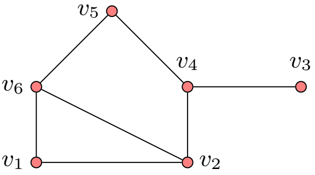


Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{Q_G}$$

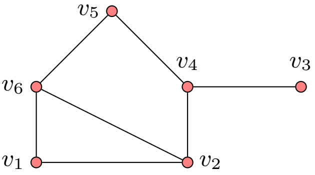
$$Q_G = \overbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}}^{D_G} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}}^{A_G}$$

Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G



Grafo G

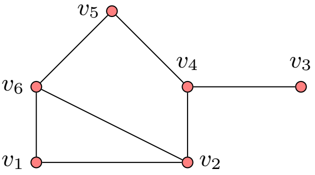
Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G



Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{Q_G}$$

Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G

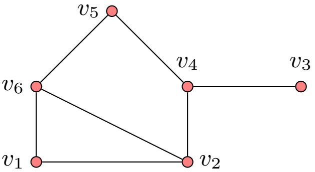


Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{Q_G}$$

Espectro

Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G



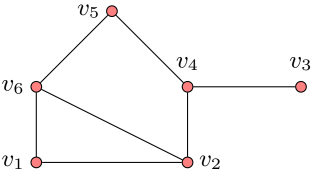
Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{Q_G}$$

Espectro

$$\sigma(Q_G) = \begin{cases} q_1 = 5{,}2647, & q_2 = 3{,}5378, \\ q_3 = 2{,}6491, & q_4 = 1{,}2987, \\ q_5 = 1{,}0000, & q_6 = 0{,}2497. \end{cases}$$

Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G



Grafo G

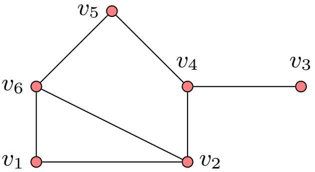
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{Q_G}$$

Espectro

$$\sigma(Q_G) = \begin{cases} q_1 = 5{,}2647, & q_2 = 3{,}5378, \\ q_3 = 2{,}6491, & q_4 = 1{,}2987, \\ q_5 = 1{,}0000, & q_6 = 0{,}2497. \end{cases}$$

Amplitud

Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G



Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{Q_G}$$

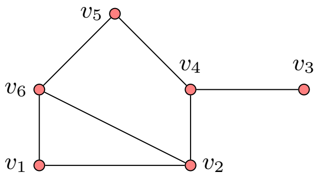
Espectro

$$\sigma(Q_G) = \begin{cases} q_1 = 5{,}2647, & q_2 = 3{,}5378, \\ q_3 = 2{,}6491, & q_4 = 1{,}2987, \\ q_5 = 1{,}0000, & q_6 = 0{,}2497. \end{cases}$$

Amplitud

$$s_Q(G) = q_1 - q_6$$

Ejemplo: Espectro y amplitud del grafo G



Grafo G

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{Q_G}$$

Espectro

$$\sigma(Q_G) = \begin{cases} q_1 = 5{,}2647, & q_2 = 3{,}5378, \\ q_3 = 2{,}6491, & q_4 = 1{,}2987, \\ q_5 = 1{,}0000, & q_6 = 0{,}2497. \end{cases}$$

Amplitud

$$s_Q(G) = q_1 - q_6 = \left\{ \begin{array}{rl} 5{,}2647 & - \\ 0{,}2497 & \\ \hline 5{,}0150 & \end{array} \right.$$

AGENDA

1. Preliminares
   - Notaciones
   - Definiciones
   - Propiedades
     - Matrices asociadas a un grafo G
     - ✓ A_G ✓ L_G ✓ Q_G
     - ✓ Espectro ✓ Amplitud
2. Distintas cotas para las amplitudes del espectro de matrices asociadas a un grafo
   - Cotas superiores
     - ✓ Para $s(A)$ de Mirsky
     - ✓ Para $s_L(G)$ de Chen & Das
     - ✓ Para $s_Q(G)$ (Establecida)
   - Cotas inferiores
     - ✓ Para $s(A)$ de Barnes & Hoffman
     - ✓ Para $s(A)$ de Jiang & Zhan
     - ✓ Para $s_Q(G)$ (Establecida)
3. Comparación
4. Conclusiones

Cota superior para $s(A)$ dada por Mirsky[11]

[11] L. Mirsky. The spread of a matrix. Mathematika, 3:127-130, 1956.

Cota superior para $s(A)$ dada por Mirsky[11]

Teorema 1:

[11] L. Mirsky. The spread of a matrix. Mathematika, 3:127-130, 1956.

Cota superior para $s(A)$ dada por Mirsky[11]

Teorema 1:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ cualquier matriz. Entonces,

[11] L. Mirsky. The spread of a matrix. Mathematika, 3:127-130, 1956.

Cota superior para $s(A)$ dada por Mirsky[11]

Teorema 1:

Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ cualquier matriz. Entonces,

$$s(A) \leq \sqrt{2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left|\mathrm{tr}\, A\right|^2},$$

[11] L. Mirsky. The spread of a matrix. Mathematika, 3:127-130, 1956.

Cota superior para $s(A)$ dada por Mirsky[11]

Teorema 1:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ cualquier matriz. Entonces,

$$s\,(A) \leq \sqrt{2\,\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}\,|\mathrm{tr}\,A|^2}, \tag{1}$$

y se cumple la igualdad si y solo si A es normal $(AA^* = A^*A)$

[11] L. Mirsky. The spread of a matrix. Mathematika, 3:127-130, 1956.

Cota superior para $s(A)$ dada por Mirsky[11]

Teorema 1:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ cualquier matriz. Entonces,

$$s(A) \leq \sqrt{2\,\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}\,|\mathrm{tr}\,A|^2}, \qquad (1)$$

y se cumple la igualdad si y solo si A es normal $(AA^* = A^*A)$ y los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ cumplen la siguiente condición,

[11] L. Mirsky. The spread of a matrix. Mathematika, 3:127-130, 1956.

Cota superior para $s(A)$ dada por Mirsky[11]

Teorema 1:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ cualquier matriz. Entonces,

$$s(A) \leq \sqrt{2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left|\text{tr}\, A\right|^2}, \tag{1}$$

y se cumple la igualdad si y solo si A es normal $(AA^* = A^*A)$ y los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ cumplen la siguiente condición, dado n autovalores son tales que $n-2$ entre ellos son iguales a la media aritmética de los otros dos.

[11] L. Mirsky. The spread of a matrix. Mathematika, 3:127-130, 1956.

Cota superior para $s(A)$ dada por Mirsky[11]

Teorema 1:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ cualquier matriz. Entonces,

$$s\,(A) \leq \sqrt{2\,\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}\,|\mathrm{tr}\,A|^2}, \tag{1}$$

y se cumple la igualdad si y solo si A es normal $(AA^* = A^*A)$ y los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ cumplen la siguiente condición, dado n autovalores son tales que $n-2$ entre ellos son iguales a la media aritmética de los otros dos. Así, diremos que los n autovalores satisfacen la condición $\mathfrak{C}$ la cual será denotada como

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-2} = \frac{\lambda_{n-1} + \lambda_n}{2}.$$

[11] L. Mirsky. The spread of a matrix. Mathematika, 3:127-130, 1956.

Aplicación del Teorema 1. $\left(s\left(A\right) \leq \sqrt{2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left(\operatorname{tr} A\right)^2}\right) \quad (1)$

Aplicación del Teorema 1. $\left(s\left(A\right) \leq \sqrt{2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left(\operatorname{tr} A\right)^2}\right) \quad (1)$

- La matriz de adyacencia de G,

Aplicación del Teorema 1. $\left(s\left(A\right) \leq \sqrt{2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left(\operatorname{tr} A\right)^2}\right) \quad (1)$

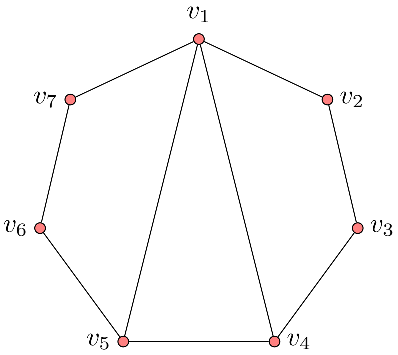
- La matriz de adyacencia de G, $\quad s(G) \leq \sqrt{2 \cdot 2m - 0}$

Aplicación del Teorema 1. $\left(s\left(A\right) \leq \sqrt{2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left(\operatorname{tr} A\right)^2}\right) \quad (1)$

- La matriz de adyacencia de G, $\quad s(G) \leq \sqrt{2 \cdot 2m - 0} = 2\sqrt{m}.$

Aplicación del Teorema 1. $\left(s(A) \leq \sqrt{2\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}(\operatorname{tr} A)^2}\right.$ (1)

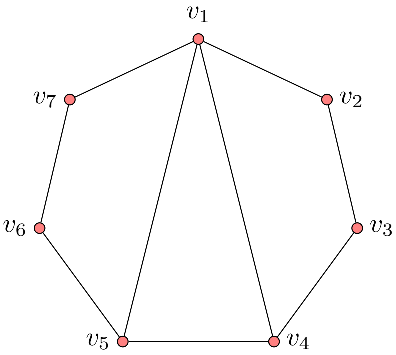
- La matriz de adyacencia de G, $s(G) \leq \sqrt{2 \cdot 2m - 0} = 2\sqrt{m}$.



G = Grafo con 7 vértices y 9 aristas

Aplicación del Teorema 1. $\left(s\,(A) \leq \sqrt{2\,\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}\,(\mathrm{tr}\,A)^2}\right)$ (1)

- La matriz de adyacencia de G, $\quad s(G) \leq \sqrt{2 \cdot 2m - 0} = 2\sqrt{m}$.

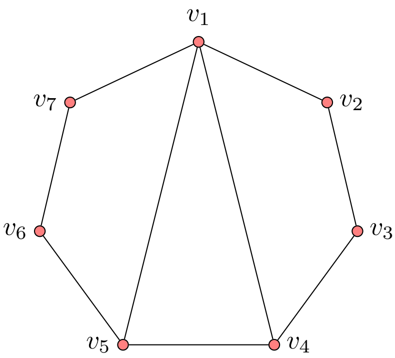


$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

G = Grafo con 7 vértices y 9 aristas

Aplicación del Teorema 1. $\left(s(A) \leq \sqrt{2\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}(\operatorname{tr} A)^2}\right)$ (1)

- La matriz de adyacencia de G, $s(G) \leq \sqrt{2 \cdot 2m - 0} = 2\sqrt{m}$.



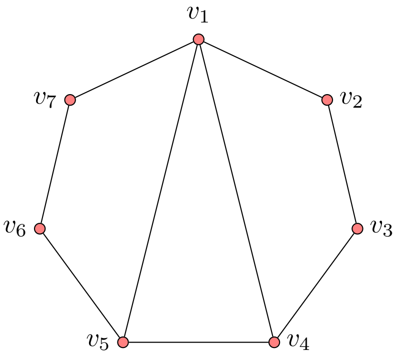
G = Grafo con 7 vértices y 9 aristas

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = 2{,}7734$

Aplicación del Teorema 1. $\left(s(A) \leq \sqrt{2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}(\operatorname{tr} A)^2}\right)$ (1)

- La matriz de adyacencia de G, $s(G) \leq \sqrt{2 \cdot 2m - 0} = 2\sqrt{m}$.



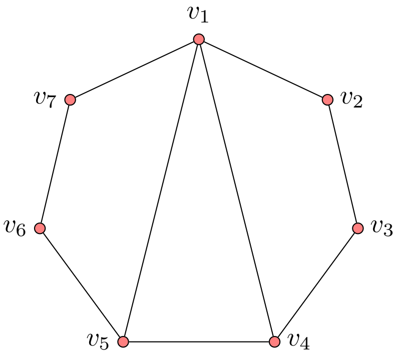
G = Grafo con 7 vértices y 9 aristas

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = 2{,}7734 + 2{,}2534$

Aplicación del Teorema 1. $\left(s(A) \leq \sqrt{2\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}(\operatorname{tr} A)^2}\right)$ (1)

- La matriz de adyacencia de G, $s(G) \leq \sqrt{2 \cdot 2m - 0} = 2\sqrt{m}$.



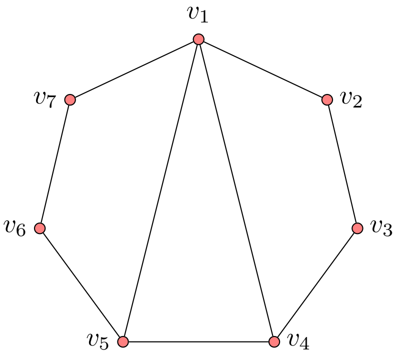
G = Grafo con 7 vértices y 9 aristas

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = 2{,}7734 + 2{,}2534 = 5{,}0268$

Aplicación del Teorema 1. $\left(s(A) \leq \sqrt{2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}(\mathrm{tr}\,A)^2}\right)$ (1)

- La matriz de adyacencia de G, $s(G) \leq \sqrt{2 \cdot 2m - 0} = 2\sqrt{m}$.



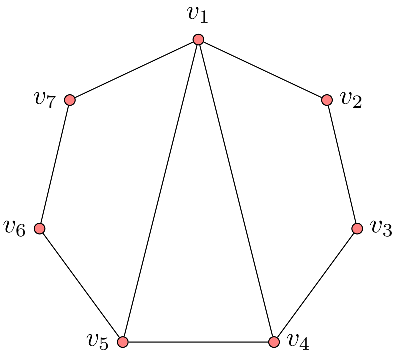
G = Grafo con 7 vértices y 9 aristas

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = 2{,}7734 + 2{,}2534 = 5{,}0268$
- (1)

Aplicación del Teorema 1. $\left(s\left(A\right) \leq \sqrt{2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left(\operatorname{tr} A\right)^2}\right)$ (1)

- La matriz de adyacencia de G, $s(G) \leq \sqrt{2 \cdot 2m - 0} = 2\sqrt{m}.$



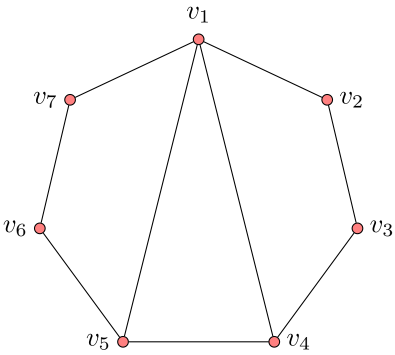
G = Grafo con 7 vértices y 9 aristas

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = 2{,}7734 + 2{,}2534 = 5{,}0268$
- (1) $2\sqrt{9} = 6$

Aplicación del Teorema 1. $\left(s\,(A) \leq \sqrt{2\,\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}\,(\operatorname{tr} A)^2}\right)$ (1)

- La matriz de adyacencia de G, $s(G) \leq \sqrt{2 \cdot 2m - 0} = 2\sqrt{m}.$



G = Grafo con 7 vértices y 9 aristas

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = 2{,}7734 + 2{,}2534 = 5{,}0268$
- (1) $2\sqrt{9} = 6$

Error relativo: $0{,}9732$

Aplicación del Teorema 1. $\left(s\left(A\right) \leq \sqrt{2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left(\operatorname{tr} A\right)^2}\right)$ (1)

Aplicación del Teorema 1. $\left(s\left(A\right) \leq \sqrt{2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left(\operatorname{tr} A\right)^2}\right) \quad (1)$

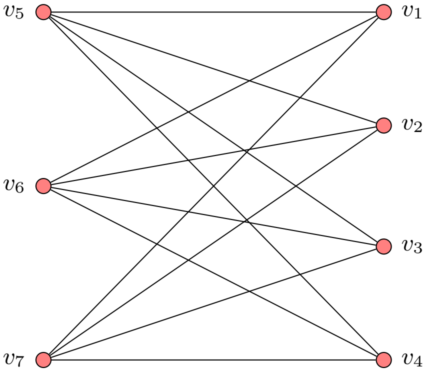
- El grafo $G = K_{a,b}$,

Aplicación del Teorema 1. $\left(s\left(A\right) \leq \sqrt{2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left(\operatorname{tr} A\right)^2}\right) \quad (1)$

- El grafo $G = K_{a,b}, \quad \sigma(K_{a,b}) = \{\pm\sqrt{ab}, 0^{[a+b-2]}\}$.

Aplicación del Teorema 1. $\left(s\left(A\right) \leq \sqrt{2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left(\operatorname{tr} A\right)^2}\right)$ (1)

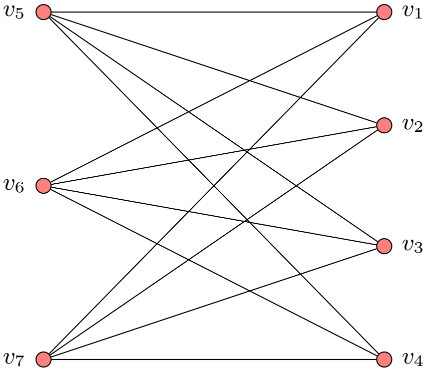
- El grafo $G = K_{a,b}$, $\sigma(K_{a,b}) = \{\pm\sqrt{ab}, 0^{[a+b-2]}\}$.



G = Grafo bipartito semiregular $K_{3,4}$

Aplicación del Teorema 1. $\left(s(A) \leq \sqrt{2\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}(\operatorname{tr} A)^2} \right)$ (1)

- El grafo $G = K_{a,b}$, $\sigma(K_{a,b}) = \{\pm\sqrt{ab}, 0^{[a+b-2]}\}$.

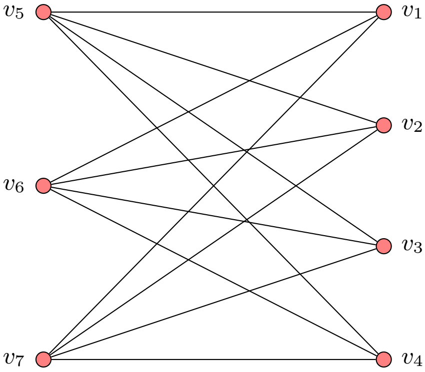


G = Grafo bipartito semiregular $K_{3,4}$

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicación del Teorema 1. $\left(s\left(A\right) \leq \sqrt{2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left(\operatorname{tr} A\right)^2}\right)$ (1)

- El grafo $G = K_{a,b}$, $\sigma(K_{a,b}) = \{\pm\sqrt{ab}, 0^{[a+b-2]}\}$.



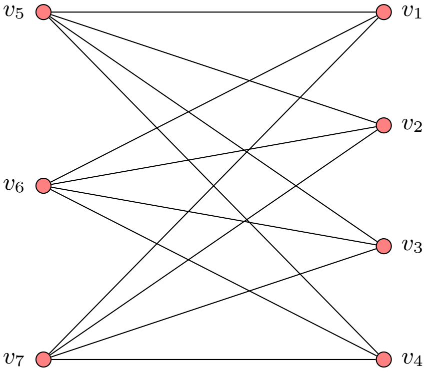
G = Grafo bipartito semiregular $K_{3,4}$

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = \sqrt{12}$

Aplicación del Teorema 1. $\left(s(A) \leq \sqrt{2\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}(\operatorname{tr} A)^2}\right)$ (1)

- El grafo $G = K_{a,b}$, $\sigma(K_{a,b}) = \{\pm\sqrt{ab}, 0^{[a+b-2]}\}$.



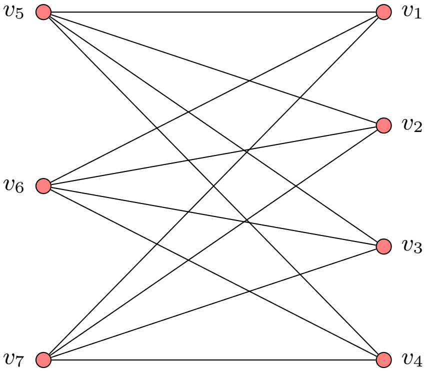
G = Grafo bipartito semiregular $K_{3,4}$

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = \sqrt{12} + \sqrt{12}$

Aplicación del Teorema 1. $\left(s\left(A\right) \leq \sqrt{2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left(\operatorname{tr} A\right)^2}\right) \quad (1)$

- El grafo $G = K_{a,b}$, $\sigma(K_{a,b}) = \{\pm\sqrt{ab}, 0^{[a+b-2]}\}$.



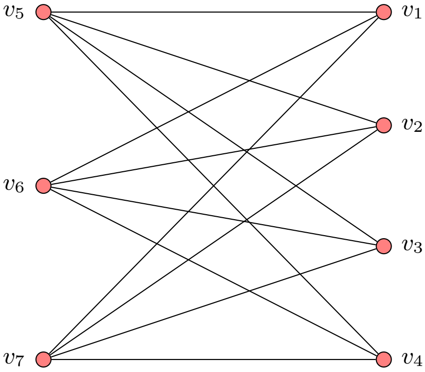
G = Grafo bipartito semiregular $K_{3,4}$

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = \sqrt{12} + \sqrt{12} = 2\sqrt{12}$

Aplicación del Teorema 1. $\left(s\left(A\right) \leq \sqrt{2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left(\operatorname{tr} A\right)^2}\right)$ (1)

- El grafo $G = K_{a,b}$, $\sigma(K_{a,b}) = \{\pm\sqrt{ab}, 0^{[a+b-2]}\}$.



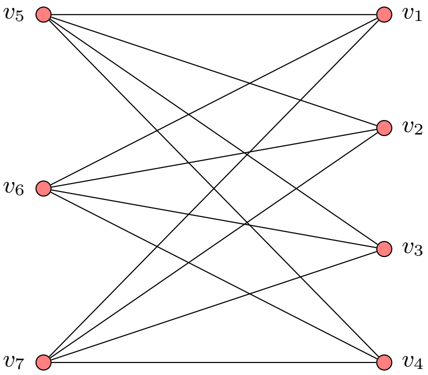
G = Grafo bipartito semiregular $K_{3,4}$

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = \sqrt{12} + \sqrt{12} = 2\sqrt{12}$
- (1)

Aplicación del Teorema 1. $\left(s(A) \leq \sqrt{2\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}(\operatorname{tr} A)^2}\right)$ (1)

- El grafo $G = K_{a,b}$, $\sigma(K_{a,b}) = \{\pm\sqrt{ab}, 0^{[a+b-2]}\}$.



G = Grafo bipartito semiregular $K_{3,4}$

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = \sqrt{12} + \sqrt{12} = 2\sqrt{12}$
- (1) $2\sqrt{12}$

A_G es normal y cumple $\mathfrak{C}$.
$\left(\lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2}\right)$

Cota superior para $s_L(G)$ dada por Chen & Das[12]

[12] X. Chen and K.Ch. Das. Some results on the Laplacian spread of a graph. Linear Algebra Appl, 505:245-260, 2016.

Cota superior para $s_L(G)$ dada por Chen & Das[12]

Teorema 2:

Sea G un grafo con $n \geq 5$ vértices y $m \geq 1$ aristas. Entonces

[12] X. Chen and K.Ch. Das. Some results on the Laplacian spread of a graph. Linear Algebra Appl, 505:245-260, 2016.

Cota superior para $s_L(G)$ dada por Chen & Das[12]

Teorema 2:

Sea G un grafo con $n \geq 5$ vértices y $m \geq 1$ aristas. Entonces

$$s_L(G) \leq \sqrt{2\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + 4m - \frac{8m^2}{n-1}},$$

[12] X. Chen and K.Ch. Das. Some results on the Laplacian spread of a graph. Linear Algebra Appl, 505:245-260, 2016.

Cota superior para $s_L(G)$ dada por Chen & Das[12]

Teorema 2:

Sea G un grafo con $n \geq 5$ vértices y $m \geq 1$ aristas. Entonces

$$s_L(G) \leq \sqrt{2\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + 4m - \frac{8m^2}{n-1}},$$

y se cumple la igualdad si y solo si G es uno de los grafos

[12] X. Chen and K.Ch. Das. Some results on the Laplacian spread of a graph. Linear Algebra Appl, 505:245-260, 2016.

Cota superior para $s_L(G)$ dada por Chen & Das[12]

Teorema 2:

Sea G un grafo con $n \geq 5$ vértices y $m \geq 1$ aristas. Entonces

$$s_L(G) \leq \sqrt{2\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + 4m - \frac{8m^2}{n-1}},$$

y se cumple la igualdad si y solo si G es uno de los grafos
$K_n, K_1 \cup 2K_{\frac{n-1}{2}}, \overline{K}_{\frac{n}{3}} \cup 2K_{\frac{n}{3}}, K_1 \cup K_{\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}}, K_{\frac{n}{3}} \cup K_{\frac{n}{3},\frac{n}{3}}$.

[12] X. Chen and K.Ch. Das. Some results on the Laplacian spread of a graph. Linear Algebra Appl, 505:245-260, 2016.

Cota superior para $s_L(G)$ dada por Chen & Das[12]

Teorema 2:

Sea G un grafo con $n \geq 5$ vértices y $m \geq 1$ aristas. Entonces

$$s_L(G) \leq \sqrt{2\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + 4m - \frac{8m^2}{n-1}},$$

y se cumple la igualdad si y solo si G es uno de los grafos $K_n, K_1 \cup 2K_{\frac{n-1}{2}}, \overline{K}_{\frac{n}{3}} \cup 2K_{\frac{n}{3}}, K_1 \cup K_{\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}}, K_{\frac{n}{3}} \cup K_{\frac{n}{3},\frac{n}{3}}$.

Corolario 2.1:

Sea G un grafo $k-$regular con n vértices. Entonces

[12] X. Chen and K.Ch. Das. Some results on the Laplacian spread of a graph. Linear Algebra Appl, 505:245-260, 2016.

Cota superior para $s_L(G)$ dada por Chen & Das[12]

Teorema 2:

Sea G un grafo con $n \geq 5$ vértices y $m \geq 1$ aristas. Entonces

$$s_L(G) \leq \sqrt{2\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + 4m - \frac{8m^2}{n-1}},$$

y se cumple la igualdad si y solo si G es uno de los grafos $K_n, K_1 \cup 2K_{\frac{n-1}{2}}, \overline{K}_{\frac{n}{3}} \cup 2K_{\frac{n}{3}}, K_1 \cup K_{\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}}, K_{\frac{n}{3}} \cup K_{\frac{n}{3},\frac{n}{3}}$.

Corolario 2.1:

Sea G un grafo $k-$regular con n vértices. Entonces

$$s_L(G) \leq \sqrt{\frac{2nk(n-k-1)}{n-1}},$$

[12] X. Chen and K.Ch. Das. Some results on the Laplacian spread of a graph. Linear Algebra Appl, 505:245-260, 2016.

Cota superior para $s_L(G)$ dada por Chen & Das[12]

Teorema 2:

Sea G un grafo con $n \geq 5$ vértices y $m \geq 1$ aristas. Entonces

$$s_L(G) \leq \sqrt{2\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + 4m - \frac{8m^2}{n-1}},$$

y se cumple la igualdad si y solo si G es uno de los grafos $K_n, K_1 \cup 2K_{\frac{n-1}{2}}, \overline{K}_{\frac{n}{3}} \cup 2K_{\frac{n}{3}}, K_1 \cup K_{\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}}, K_{\frac{n}{3}} \cup K_{\frac{n}{3},\frac{n}{3}}$.

Corolario 2.1:

Sea G un grafo $k-$regular con n vértices. Entonces

$$s_L(G) \leq \sqrt{\frac{2nk(n-k-1)}{n-1}},$$

y se cumple la igualdad si y solo si $G \cong K_n$.

[12] X. Chen and K.Ch. Das. Some results on the Laplacian spread of a graph. Linear Algebra Appl, 505:245-260, 2016.

Cota superior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 3:

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota superior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 3:

Sea G un $(n, m)-$grafo conectado. Entonces,

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota superior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 3:

Sea G un $(n, m)-$grafo conectado. Entonces,

$$s_Q(G) \leq \sqrt{2\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + 2m\right) - \frac{8m^2}{n}} = \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}}, \qquad (2)$$

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota superior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 3:

Sea G un $(n,m)-$grafo conectado. Entonces,

$$s_Q(G) \leq \sqrt{2\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + 2m\right) - \frac{8m^2}{n}} = \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}}, \qquad (2)$$

y se cumple la igualdad si y solo si $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$

Índice de Zagreb

$$M_1(G) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2.$$

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Demostración del Teorema 3. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}}\right)$ (2)

Dado que Q_G es una matriz normal, aplicando el Teorema 1, se tiene

$$s_Q(G) \leq \sqrt{2\|Q_G\|_F^2 - \frac{2}{n}|\operatorname{tr}(Q_G)|^2},$$

Demostración del Teorema 3. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}}\right)$ (2)

Dado que Q_G es una matriz normal, aplicando el Teorema 1, se tiene

$$s_Q(G) \leq \sqrt{2\|Q_G\|_F^2 - \frac{2}{n}|\operatorname{tr}(Q_G)|^2},$$

como $\|Q_G\|_F^2 = M_1(G) + 2m$

Demostración del Teorema 3. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}}\right)$ (2)

Dado que Q_G es una matriz normal, aplicando el Teorema 1, se tiene

$$s_Q(G) \leq \sqrt{2\|Q_G\|_F^2 - \frac{2}{n}|\operatorname{tr}(Q_G)|^2},$$

como $\|Q_G\|_F^2 = M_1(G) + 2m$ y $\operatorname{tr}(Q_G) = 2m$, el resultado de (2) se sigue.

Demostración del Teorema 3. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}}\right)$ (2)

Dado que Q_G es una matriz normal, aplicando el Teorema 1, se tiene

$$s_Q(G) \leq \sqrt{2\|Q_G\|_F^2 - \frac{2}{n}|\operatorname{tr}(Q_G)|^2},$$

como $\|Q_G\|_F^2 = M_1(G) + 2m$ y $\operatorname{tr}(Q_G) = 2m$, el resultado de (2) se sigue.
Para la condición $\mathfrak{C}$ se tiene,

$$2m \quad = \quad \operatorname{tr}(Q_G)$$

Demostración del Teorema 3. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}}\right)$ (2)

Dado que Q_G es una matriz normal, aplicando el Teorema 1, se tiene

$$s_Q(G) \leq \sqrt{2\|Q_G\|_F^2 - \frac{2}{n}|\operatorname{tr}(Q_G)|^2},$$

como $\|Q_G\|_F^2 = M_1(G) + 2m$ y $\operatorname{tr}(Q_G) = 2m$, el resultado de (2) se sigue. Para la condición $\mathfrak{C}$ se tiene,

$$\begin{aligned} 2m &= \operatorname{tr}(Q_G) \\ &= q_1 + (n-2)\left(\frac{q_1 + q_n}{2}\right) + q_n \end{aligned}$$

Demostración del Teorema 3. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}}\right)$ (2)

Dado que Q_G es una matriz normal, aplicando el Teorema 1, se tiene

$$s_Q(G) \leq \sqrt{2\|Q_G\|_F^2 - \frac{2}{n}|\operatorname{tr}(Q_G)|^2},$$

como $\|Q_G\|_F^2 = M_1(G) + 2m$ y $\operatorname{tr}(Q_G) = 2m$, el resultado de (2) se sigue.
Para la condición $\mathfrak{C}$ se tiene,

$$\begin{aligned} 2m &= \operatorname{tr}(Q_G) \\ &= q_1 + (n-2)\left(\frac{q_1 + q_n}{2}\right) + q_n \\ &= (q_1 + q_n)\left(\frac{n}{2}\right) = nq_2 \\ q_2 &= \frac{2m}{n}. \end{aligned}$$

Demostración del Teorema 3. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}}\right)$ (2)

Luego, si se aplica el Lema 2.2[3] y el cociente de Rayleigh[4].

[4]Y. Hong and X.D Zhang. Sharp upper and lower bounds for largest eigenvalue of the Laplacian matrices of trees. Discrete Math, 296:187-197, 2005.

$$\rho(A) = x^T A x \;\; \Rightarrow \;\; Ax = \rho(A)x.$$

[4]F. Zhang. Matrix theory. Springer, New York, London, 2010.

$$\frac{x^T Q_G\, x}{x^T x} \leq q_1.$$

Demostración del Teorema 3. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}} \right)$ (2)

Luego, si se aplica el Lema 2.2[3] y el cociente de Rayleigh[4]. Se tiene,

$$q_2 = \frac{2m}{n}$$

[4] Y. Hong and X.D Zhang. Sharp upper and lower bounds for largest eigenvalue of the Laplacian matrices of trees. Discrete Math, 296:187-197, 2005.

$$\rho(A) = x^T A x \ \Rightarrow \ Ax = \rho(A)x.$$

[4] F. Zhang. Matrix theory. Springer, New York, London, 2010.

$$\frac{x^T Q_G\, x}{x^T x} \leq q_1.$$

Demostración del Teorema 3. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}}\right)$ (2)

Luego, si se aplica el Lema 2.2[3] y el cociente de Rayleigh[4]. Se tiene,

$$q_2 = \frac{2m}{n} = \frac{1}{2}\ \mathbf{e}^T Q_G\ \mathbf{e}$$

[4] Y. Hong and X.D Zhang. Sharp upper and lower bounds for largest eigenvalue of the Laplacian matrices of trees. Discrete Math, 296:187-197, 2005.

$$\rho(A) = x^T A x \ \Rightarrow\ Ax = \rho(A)x.$$

[4] F. Zhang. Matrix theory. Springer, New York, London, 2010.

$$\frac{x^T Q_G\ x}{x^T x} \leq q_1.$$

Demostración del Teorema 3. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}}\right)$ (2)

Luego, si se aplica el Lema 2.2[3] y el cociente de Rayleigh[4]. Se tiene,

$$q_2 = \frac{2m}{n} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{e}^T Q_G\,\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T\mathbf{e}}$$

[4] Y. Hong and X.D Zhang. Sharp upper and lower bounds for largest eigenvalue of the Laplacian matrices of trees. Discrete Math, 296:187-197, 2005.

$$\rho(A) = x^T A x \;\Rightarrow\; Ax = \rho(A)x.$$

[4] F. Zhang. Matrix theory. Springer, New York, London, 2010.

$$\frac{x^T Q_G\, x}{x^T x} \leq q_1.$$

Demostración del Teorema 3. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}}\right)$ (2)

Luego, si se aplica el Lema 2.2[3] y el cociente de Rayleigh[4]. Se tiene,

$$q_2 = \frac{2m}{n} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{e}^T Q_G\,\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T\mathbf{e}} \leq \frac{1}{2}\,q_1 .$$

[4] Y. Hong and X.D Zhang. Sharp upper and lower bounds for largest eigenvalue of the Laplacian matrices of trees. Discrete Math, 296:187-197, 2005.

$$\rho(A) = x^T A x \;\Rightarrow\; Ax = \rho(A)x.$$

[4] F. Zhang. Matrix theory. Springer, New York, London, 2010.

$$\frac{x^T Q_G\,x}{x^T x} \leq q_1 .$$

Demostración del Teorema 3. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}}\right)$ (2)

Luego, si se aplica el Lema 2.2[3] y el cociente de Rayleigh[4]. Se tiene,

$$q_2 = \frac{2m}{n} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{e}^T Q_G\,\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T\mathbf{e}} \leq \frac{1}{2}\,q_1.$$

Entonces, $q_2 = \dfrac{q_1 + q_n}{2} \leq \dfrac{1}{2}\,q_1$

[4] Y. Hong and X.D Zhang. Sharp upper and lower bounds for largest eigenvalue of the Laplacian matrices of trees. Discrete Math, 296:187-197, 2005.

$$\rho(A) = x^T Ax \;\Rightarrow\; Ax = \rho(A)x.$$

[4] F. Zhang. Matrix theory. Springer, New York, London, 2010.

$$\frac{x^T Q_G\,x}{x^T x} \leq q_1.$$

Demostración del Teorema 3. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}}\right)$ (2)

Luego, si se aplica el Lema 2.2[3] y el cociente de Rayleigh[4]. Se tiene,

$$q_2 = \frac{2m}{n} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{e}^T Q_G\,\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T\mathbf{e}} \leq \frac{1}{2}\,q_1.$$

Entonces, $q_2 = \dfrac{q_1 + q_n}{2} \leq \dfrac{1}{2}\,q_1 \Rightarrow 2q_2 = q_1 + q_n \leq q_1.$

[4] Y. Hong and X.D Zhang. Sharp upper and lower bounds for largest eigenvalue of the Laplacian matrices of trees. Discrete Math, 296:187-197, 2005.

$$\rho(A) = x^T A x \;\;\Rightarrow\;\; Ax = \rho(A)x.$$

[4] F. Zhang. Matrix theory. Springer, New York, London, 2010.

$$\frac{x^T Q_G\,x}{x^T x} \leq q_1.$$

Demostración del Teorema 3. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}}\right)$ (2)

Luego, si se aplica el Lema 2.2[3] y el cociente de Rayleigh[4]. Se tiene,

$$q_2 = \frac{2m}{n} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{e}^T Q_G\,\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T\mathbf{e}} \leq \frac{1}{2}\,q_1.$$

Entonces, $q_2 = \dfrac{q_1 + q_n}{2} \leq \dfrac{1}{2}\,q_1 \Rightarrow 2q_2 = q_1 + q_n \leq q_1.$

Así, $q_n = 0$ y $q_2 = \frac{1}{2}q_1.$

[4] Y. Hong and X.D Zhang. Sharp upper and lower bounds for largest eigenvalue of the Laplacian matrices of trees. Discrete Math, 296:187-197, 2005.

$$\rho(A) = x^T A x \;\Rightarrow\; Ax = \rho(A)x.$$

[4] F. Zhang. Matrix theory. Springer, New York, London, 2010.

$$\frac{x^T Q_G\,x}{x^T x} \leq q_1.$$

Demostración del Teorema 3. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}}\right)$ (2)

Luego, si se aplica el Lema 2.2[3] y el cociente de Rayleigh[4]. Se tiene,

$$q_2 = \frac{2m}{n} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{e}^T Q_G\,\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T\mathbf{e}} \leq \frac{1}{2}\,q_1.$$

Entonces, $q_2 = \dfrac{q_1 + q_n}{2} \leq \dfrac{1}{2}\,q_1 \Rightarrow 2q_2 = q_1 + q_n \leq q_1.$

$$\text{Así, } q_n = 0 \text{ y } q_2 = \frac{1}{2}q_1.$$

Obteniendo, $q_1 = 2q_2 = \dfrac{4m}{n}$

[4] Y. Hong and X.D Zhang. Sharp upper and lower bounds for largest eigenvalue of the Laplacian matrices of trees. Discrete Math, 296:187-197, 2005.

$$\rho(A) = x^T Ax \;\Rightarrow\; Ax = \rho(A)x.$$

[4] F. Zhang. Matrix theory. Springer, New York, London, 2010.

$$\frac{x^T Q_G\,x}{x^T x} \leq q_1.$$

Demostración del Teorema 3. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}} \right)$ (2)

Luego, si se aplica el Lema 2.2[3] y el cociente de Rayleigh[4]. Se tiene,

$$q_2 = \frac{2m}{n} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{e}^T Q_G\,\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{e}} \leq \frac{1}{2}\,q_1.$$

Entonces, $q_2 = \dfrac{q_1 + q_n}{2} \leq \dfrac{1}{2}\,q_1 \Rightarrow 2q_2 = q_1 + q_n \leq q_1.$

Así, $q_n = 0$ y $q_2 = \dfrac{1}{2} q_1.$

Obteniendo, $q_1 = 2q_2 = \dfrac{4m}{n} \Rightarrow G$ es regular con regularidad $\dfrac{n}{2}$.

[4] Y. Hong and X.D Zhang. Sharp upper and lower bounds for largest eigenvalue of the Laplacian matrices of trees. Discrete Math, 296:187-197, 2005.

$$\rho(A) = x^T A x \;\Rightarrow\; Ax = \rho(A)x.$$

[4] F. Zhang. Matrix theory. Springer, New York, London, 2010.

$$\frac{x^T Q_G\, x}{x^T x} \leq q_1.$$

Cota superior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Corolario 3.1:

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota superior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Corolario 3.1:

Sea G_k un grafo $k-$regular con n vértices. Entonces

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota superior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Corolario 3.1:

Sea G_k un grafo $k-$regular con n vértices. Entonces

$$s_Q(G) \leq \sqrt{2nk}, \tag{3}$$

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota superior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Corolario 3.1:

Sea G_k un grafo $k-$regular con n vértices. Entonces

$$s_Q(G) \leq \sqrt{2nk}, \tag{3}$$

y se cumple la igualdad si y solo si $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$.

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Demostración del Corolario 3.1. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2nk}\right) \quad (3)$

Como el grafo es $k-$regular. Entonces

Demostración del Corolario 3.1. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2nk}\right)$ (3)

Como el grafo es $k-$regular. Entonces

$$M_1(G) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = nk^2.$$

Demostración del Corolario 3.1. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2nk}\right)$ (3)

Como el grafo es $k-$regular. Entonces

$$M_1(G) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = nk^2.$$

Además,

$$\operatorname{tr} Q_G = 2m \quad = \quad kn$$

Demostración del Corolario 3.1. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2nk}\right) \quad (3)$

Como el grafo es $k-$regular. Entonces

$$M_1(G) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = nk^2.$$

Además,

$$\operatorname{tr} Q_G = 2m \quad = \quad kn \quad \Rightarrow \quad m = \frac{kn}{2}.$$

Demostración del Corolario 3.1. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2nk}\right)$ (3)

Como el grafo es $k-$regular. Entonces

$$M_1(G) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = nk^2.$$

Además,

$$\operatorname{tr} Q_G = 2m = kn \Rightarrow m = \frac{kn}{2}.$$

Por lo tanto,

$$2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}$$

Demostración del Corolario 3.1. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2nk}\right)$ (3)

Como el grafo es $k-$regular. Entonces

$$M_1(G) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = nk^2.$$

Además,

$$\operatorname{tr} Q_G = 2m \quad = \quad kn \quad \Rightarrow \quad m = \frac{kn}{2}.$$

Por lo tanto,

$$2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n} \quad = \quad 2nk^2 + 4\left(\frac{kn}{2}\right) - \left(\frac{8}{n}\right)\left(\frac{kn}{2}\right)^2$$

Demostración del Corolario 3.1. $\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2nk}\right)$ (3)

Como el grafo es $k-$regular. Entonces

$$M_1(G) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = nk^2.$$

Además,

$$\operatorname{tr} Q_G = 2m = kn \Rightarrow m = \frac{kn}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n} &= 2nk^2 + 4\left(\frac{kn}{2}\right) - \left(\frac{8}{n}\right)\left(\frac{kn}{2}\right)^2 \\ &= 2nk^2 + 2nk - 2nk^2 \\ &= 2nk. \end{aligned}$$

Cota superior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Corolario 3.2:

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota superior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Corolario 3.2:

Sea G un $(n, m)-$grafo conectado. Entonces

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota superior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Corolario 3.2:

Sea G un $(n,m)-$grafo conectado. Entonces

$$s_Q(G) \leq \sqrt{2m\left(\frac{2m}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\Delta + (\Delta - \delta)\left(1 - \frac{\Delta}{n-1}\right)\right) + 4m - \frac{8m^2}{n}}, \quad (4)$$

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota superior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Corolario 3.2:

Sea G un $(n,m)-$grafo conectado. Entonces

$$s_Q(G) \leq \sqrt{2m\left(\frac{2m}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\Delta + (\Delta-\delta)\left(1-\frac{\Delta}{n-1}\right)\right) + 4m - \frac{8m^2}{n}}, \quad (4)$$

y se cumple la igualdad si y solo si $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$.

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

$$\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}} \right) \text{ (2)} \Rightarrow \text{Teorema 3}$$

$$\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2m\left(\frac{2m}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\Delta + (\Delta - \delta)\left(1 - \frac{\Delta}{n-1}\right)\right) + 4m - \frac{8m^2}{n}} \right) \text{ (4)} \Rightarrow \text{Corolario 3.2}$$

Demostración del Corolario 3.2.

En el Teorema 4.2[5] se demostró que:

$$M_1(G) \leq m\left(\frac{2m}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\Delta + (\Delta - \delta)\left(1 - \frac{\Delta}{n-1}\right)\right). \tag{5}$$

[5] K.Ch. Das. Maximizing the sum of the squares of the degrees of a graph. Discrete Mathematics, 285:57-66, 2004

$$\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}}\right) (2) \Rightarrow \text{Teorema 3}$$

$$\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2m\left(\frac{2m}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\Delta + (\Delta-\delta)\left(1-\frac{\Delta}{n-1}\right)\right) + 4m - \frac{8m^2}{n}}\right) (4) \Rightarrow \text{Corolario 3.2}$$

Demostración del Corolario 3.2.

En el Teorema 4.2[5] se demostró que:

$$M_1(G) \leq m\left(\frac{2m}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\Delta + (\Delta-\delta)\left(1-\frac{\Delta}{n-1}\right)\right). \tag{5}$$

Reemplazando $M_1(G)$ en el Teorema 3 por su cota superior en (5) el resultado se sigue.

[5] K.Ch. Das. Maximizing the sum of the squares of the degrees of a graph. Discrete Mathematics, 285:57-66, 2004

$$\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}} \right) \text{ (2) } \Rightarrow \text{ Teorema 3}$$

$$\left(s_Q(G) \leq \sqrt{2m\left(\frac{2m}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\Delta + (\Delta - \delta)\left(1 - \frac{\Delta}{n-1}\right)\right) + 4m - \frac{8m^2}{n}} \right) \text{ (4) } \Rightarrow \text{ Corolario 3.2}$$

Demostración del Corolario 3.2.

En el Teorema 4.2[5] se demostró que:

$$M_1(G) \leq m\left(\frac{2m}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\Delta + (\Delta - \delta)\left(1 - \frac{\Delta}{n-1}\right)\right). \tag{5}$$

Reemplazando $M_1(G)$ en el Teorema 3 por su cota superior en (5) el resultado se sigue.
La igualdad se cumple si y solo si se cumple en Teorema 3 y (5), o equivalentemente $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$.

[5] K.Ch. Das. Maximizing the sum of the squares of the degrees of a graph. Discrete Mathematics, 285:57-66, 2004

AGENDA

1. Preliminares
   - Notaciones
   - Definiciones
   - Propiedades
     - Matrices asociadas a un grafo G
     - ✓ A_G ✓ L_G ✓ Q_G
     - ✓ Espectro ✓ Amplitud
2. Distintas cotas para las amplitudes del espectro de matrices asociadas a un grafo
   - Cotas superiores
     - ✓ Para $s(A)$ de Mirsky
     - ✓ Para $s_L(G)$ de Chen & Das
     - ✓ Para $s_Q(G)$ (Establecida)
   - Cotas inferiores
     - ✓ Para $s(A)$ de Barnes & Hoffman
     - ✓ Para $s(A)$ de Jiang & Zhan
     - ✓ Para $s_Q(G)$ (Establecida)
3. Comparación
4. Conclusiones

Cota inferior de Barnes & Hoffman[14]

[14] E.R. Barnes and A.J. Hoffman. Bounds for the spectrum of normal matrices. Linear Algebra Appl, 201:79-90, 1994.

Cota inferior de Barnes & Hoffman[14]

Teorema 4:

[14] E.R. Barnes and A.J. Hoffman. Bounds for the spectrum of normal matrices. Linear Algebra Appl, 201:79-90, 1994.

Cota inferior de Barnes & Hoffman[14]

Teorema 4:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz Hermítica.

[14] E.R. Barnes and A.J. Hoffman. Bounds for the spectrum of normal matrices. Linear Algebra Appl, 201:79-90, 1994.

Cota inferior de Barnes & Hoffman[14]

Teorema 4:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz Hermítica. Entonces,

[14]E.R. Barnes and A.J. Hoffman. Bounds for the spectrum of normal matrices. Linear Algebra Appl, 201:79-90, 1994.

Cota inferior de Barnes & Hoffman[14]

Teorema 4:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz Hermítica. Entonces,

$$s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}. \tag{6}$$

[14] E.R. Barnes and A.J. Hoffman. Bounds for the spectrum of normal matrices. Linear Algebra Appl, 201:79-90, 1994.

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right) \quad (6)$

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2 \sum_{k \neq i}^{n} |a_{ik}|^2 + 2 \sum_{k \neq j}^{n} |a_{jk}|^2 \right\} \right) \quad (6)$

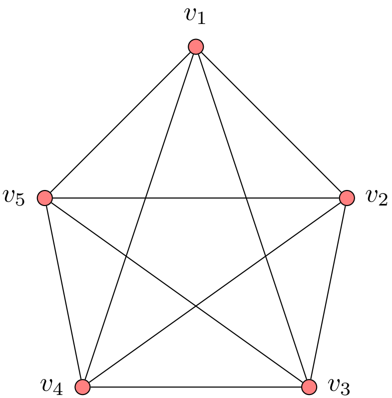
- La matriz de adyacencia de G,

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n} |a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n} |a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6)

- La matriz de adyacencia de G, $s(G) \geq 2\sqrt{\Delta}$.

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6)

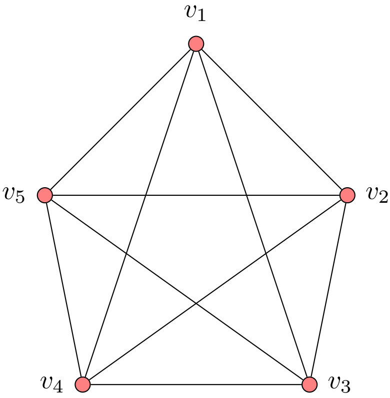
- La matriz de adyacencia de G, $s(G) \geq 2\sqrt{\Delta}$.



G = Grafo completo K_5

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6)

- La matriz de adyacencia de G, $s(G) \geq 2\sqrt{\Delta}$.

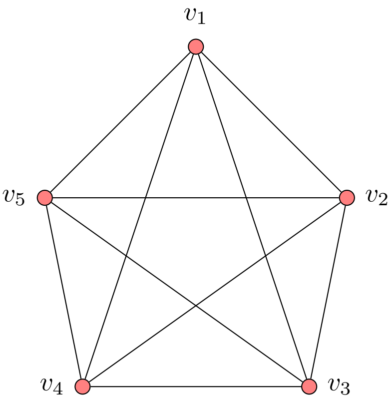


G = Grafo completo K_5

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6)

- La matriz de adyacencia de G, $s(G) \geq 2\sqrt{\Delta}$.



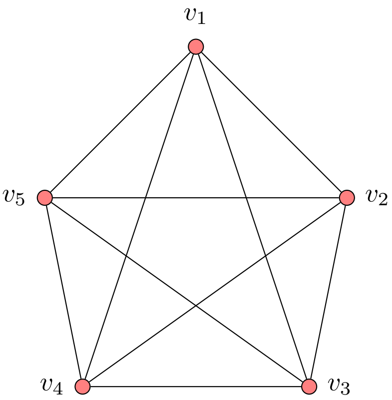
G = Grafo completo K_5

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = 4$

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6)

- La matriz de adyacencia de G, $s(G) \geq 2\sqrt{\Delta}$.



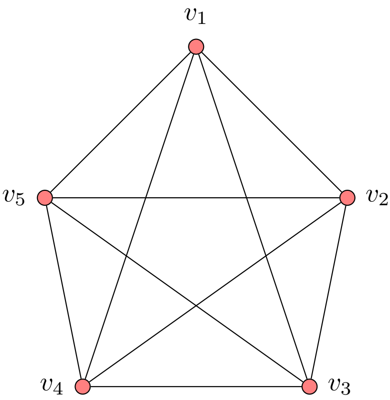
G = Grafo completo K_5

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = 4 + 1$

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6)

- La matriz de adyacencia de G, $s(G) \geq 2\sqrt{\Delta}$.



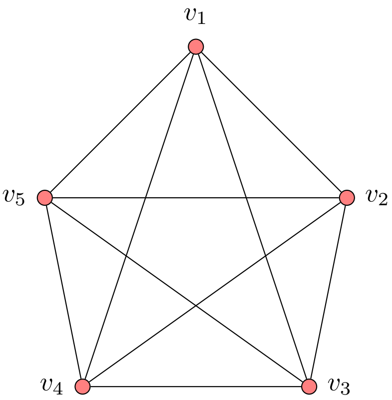
G = Grafo completo K_5

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = 4 + 1 = 5$

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2 \sum_{k \neq i}^{n} |a_{ik}|^2 + 2 \sum_{k \neq j}^{n} |a_{jk}|^2 \right\}\right)$ (6)

- La matriz de adyacencia de G, $s(G) \geq 2\sqrt{\Delta}$.



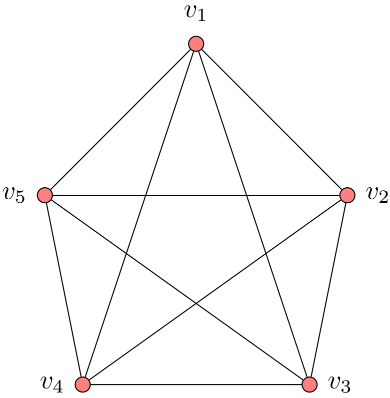
G = Grafo completo K_5

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = 4 + 1 = 5$
- (2)

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6)

- La matriz de adyacencia de G, $s(G) \geq 2\sqrt{\Delta}$.



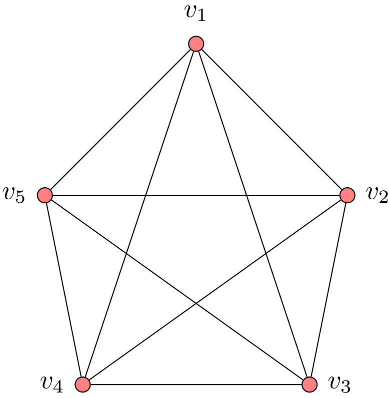
G = Grafo completo K_5

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = 4 + 1 = 5$
- (2) $2\sqrt{4} = 4$

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6)

- La matriz de adyacencia de G, $s(G) \geq 2\sqrt{\Delta}$.



G = Grafo completo K_5

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = 4 + 1 = 5$
- (2) $2\sqrt{4} = 4$

Error relativo: 1

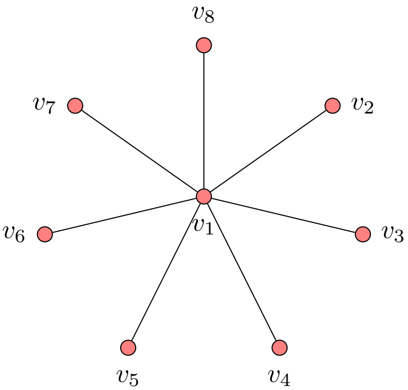
Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2 \sum_{k \neq i}^{n} |a_{ik}|^2 + 2 \sum_{k \neq j}^{n} |a_{jk}|^2 \right\} \right)$ (6)

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6)

- El grafo $G = K_{1,n-1}$.

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6)

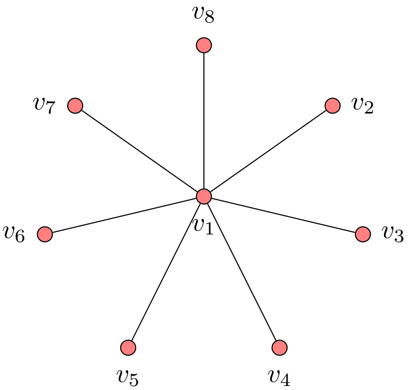
- El grafo $G = K_{1,n-1}$. Cumple la igualdad.



G = Estrella S_7

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6)

- El grafo $G = K_{1,n-1}$. Cumple la igualdad.

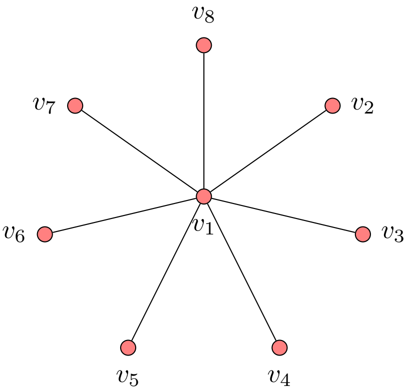


G = Estrella S_7

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2 \sum_{k \neq i}^{n} |a_{ik}|^2 + 2 \sum_{k \neq j}^{n} |a_{jk}|^2 \right\} \right)$ (6)

- El grafo $G = K_{1,n-1}$. Cumple la igualdad.



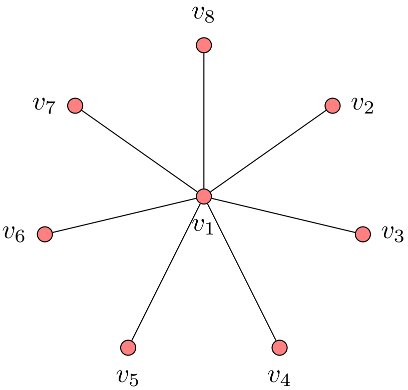
G = Estrella S_7

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = \sqrt{7}$

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6)

- El grafo $G = K_{1,n-1}$. Cumple la igualdad.



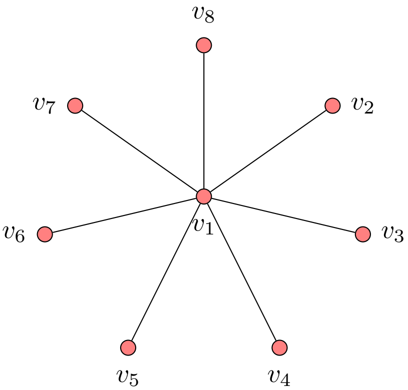
G = Estrella S_7

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = \sqrt{7} + \sqrt{7}$

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6)

- El grafo $G = K_{1,n-1}$. Cumple la igualdad.



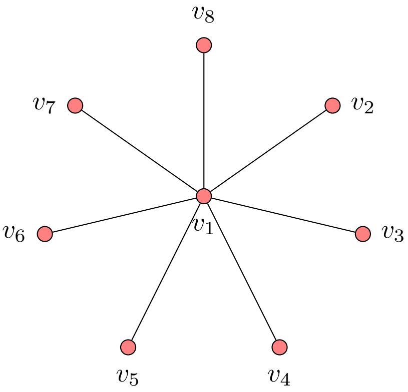
G = Estrella S_7

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = \sqrt{7} + \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6)

- El grafo $G = K_{1,n-1}$. Cumple la igualdad.



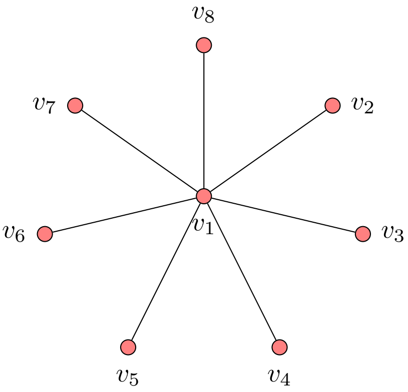
G = Estrella S_7

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = \sqrt{7} + \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$
- (2)

Aplicación del Teorema 4. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6)

- El grafo $G = K_{1,n-1}$. Cumple la igualdad.



G = Estrella S_7

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $s(G) = \sqrt{7} + \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$
- (2) $\sqrt{2*7+2*7} = 2\sqrt{7}$

Cota inferior de Jiang & Zhan[15]

Teorema 5:

[15] E. Jiang and X. Zhan. Lower bounds for the spread of a Hermitian matrix. Linear Algebra Appl, 256:153-163, 1997.

Cota inferior de Jiang & Zhan[15]

Teorema 5:

Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ una matriz Hermítica.

[15] E. Jiang and X. Zhan. Lower bounds for the spread of a Hermitian matrix. Linear Algebra Appl, 256:153-163, 1997.

Cota inferior de Jiang & Zhan[15]

Teorema 5:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz Hermítica. Entonces,

[15] E. Jiang and X. Zhan. Lower bounds for the spread of a Hermitian matrix. Linear Algebra Appl, 256:153-163, 1997.

Cota inferior de Jiang & Zhan[15]

Teorema 5:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz Hermítica. Entonces,

$$s^2(A) \geq \max_{i\neq j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2 + e_{ij}\right\},$$

[15] E. Jiang and X. Zhan. Lower bounds for the spread of a Hermitian matrix. Linear Algebra Appl, 256:153-163, 1997.

Cota inferior de Jiang & Zhan[15]

Teorema 5:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz Hermítica. Entonces,

$$s^2(A) \geq \max_{i\neq j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2 + e_{ij}\right\}, \tag{7}$$

donde,

[15] E. Jiang and X. Zhan. Lower bounds for the spread of a Hermitian matrix. Linear Algebra Appl, 256:153-163, 1997.

Cota inferior de Jiang & Zhan[15]

Teorema 5:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz Hermítica. Entonces,

$$s^2(A) \geq \max_{i\neq j} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n} |a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n} |a_{jk}|^2 + e_{ij} \right\}, \tag{7}$$

donde,

$$e_{ij} = \begin{cases} 2f_{ij} \\ \end{cases}$$

[15] E. Jiang and X. Zhan. Lower bounds for the spread of a Hermitian matrix. Linear Algebra Appl, 256:153-163, 1997.

Cota inferior de Jiang & Zhan[15]

Teorema 5:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz Hermítica. Entonces,

$$s^2(A) \geq \max_{i\neq j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2 + e_{ij}\right\}, \tag{7}$$

donde,

$$e_{ij} = \begin{cases} 2f_{ij} & \text{si } a_{ii} = a_{jj}, \\ & \end{cases}$$

[15] E. Jiang and X. Zhan. Lower bounds for the spread of a Hermitian matrix. Linear Algebra Appl, 256:153-163, 1997.

Cota inferior de Jiang & Zhan[15]

Teorema 5:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz Hermítica. Entonces,

$$s^2(A) \geq \max_{i\neq j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2 + e_{ij}\right\}, \tag{7}$$

donde,

$$e_{ij} = \begin{cases} 2f_{ij} & \text{si } a_{ii} = a_{jj}, \\ \min\Big\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2|(a_{ii}-a_{jj})^2 - f_{ij}|, & \end{cases}$$

[15] E. Jiang and X. Zhan. Lower bounds for the spread of a Hermitian matrix. Linear Algebra Appl, 256:153-163, 1997.

Cota inferior de Jiang & Zhan[15]

Teorema 5:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz Hermítica. Entonces,

$$s^2(A) \geq \max_{i\neq j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2 + e_{ij}\right\}, \tag{7}$$

donde,

$$e_{ij} = \begin{cases} 2f_{ij} & \text{si } a_{ii} = a_{jj}, \\ \min\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2|(a_{ii}-a_{jj})^2 - f_{ij}|, \dfrac{f_{ij}^2}{(a_{ii}-a_{jj})^2}\right\} & \end{cases}$$

[15] E. Jiang and X. Zhan. Lower bounds for the spread of a Hermitian matrix. Linear Algebra Appl, 256:153-163, 1997.

Cota inferior de Jiang & Zhan[15]

Teorema 5:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz Hermítica. Entonces,

$$s^2(A) \geq \max_{i\neq j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2 + e_{ij}\right\}, \qquad (7)$$

donde,

$$e_{ij} = \begin{cases} 2f_{ij} & \text{si } a_{ii} = a_{jj}, \\ \min\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2|(a_{ii}-a_{jj})^2 - f_{ij}|, \dfrac{f_{ij}^2}{(a_{ii}-a_{jj})^2}\right\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

[15] E. Jiang and X. Zhan. Lower bounds for the spread of a Hermitian matrix. Linear Algebra Appl, 256:153-163, 1997.

Cota inferior de Jiang & Zhan[15]

Teorema 5:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz Hermítica. Entonces,

$$s^2(A) \geq \max_{i\neq j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2 + e_{ij}\right\}, \tag{7}$$

donde,

$$e_{ij} = \begin{cases} 2f_{ij} & \text{si } a_{ii} = a_{jj}, \\ \min\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2|(a_{ii}-a_{jj})^2 - f_{ij}|, \dfrac{f_{ij}^2}{(a_{ii}-a_{jj})^2}\right\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y f_{ij}

[15] E. Jiang and X. Zhan. Lower bounds for the spread of a Hermitian matrix. Linear Algebra Appl, 256:153-163, 1997.

Cota inferior de Jiang & Zhan[15]

Teorema 5:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz Hermítica. Entonces,

$$s^2(A) \geq \max_{i\neq j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2 + e_{ij}\right\}, \tag{7}$$

donde,

$$e_{ij} = \begin{cases} 2f_{ij} & \text{si } a_{ii} = a_{jj}, \\ \min\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2|(a_{ii}-a_{jj})^2 - f_{ij}|, \dfrac{f_{ij}^2}{(a_{ii}-a_{jj})^2}\right\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\text{y } \ f_{ij} = \left|\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 - \right.$$

[15] E. Jiang and X. Zhan. Lower bounds for the spread of a Hermitian matrix. Linear Algebra Appl, 256:153-163, 1997.

Cota inferior de Jiang & Zhan[15]

Teorema 5:

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz Hermítica. Entonces,

$$s^2(A) \geq \max_{i\neq j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2 + e_{ij}\right\}, \tag{7}$$

donde,

$$e_{ij} = \begin{cases} 2f_{ij} & \text{si } a_{ii} = a_{jj}, \\ \min\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2|(a_{ii}-a_{jj})^2 - f_{ij}|, \dfrac{f_{ij}^2}{(a_{ii}-a_{jj})^2}\right\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\text{y } \; f_{ij} = \left|\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 - \sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right|.$$

[15] E. Jiang and X. Zhan. Lower bounds for the spread of a Hermitian matrix. Linear Algebra Appl, 256:153-163, 1997.

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 6:

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 6:

Sea G un grafo de orden n con vértice de mayor grado Δ y vértice de menor grado δ.

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 6:

Sea G un grafo de orden n con vértice de mayor grado Δ y vértice de menor grado δ. Si $\Delta - \delta \geq 2$. Entonces

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 6:

Sea G un grafo de orden n con vértice de mayor grado Δ y vértice de menor grado δ. Si $\Delta - \delta \geq 2$. Entonces

$$s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta - \delta)^2 + 2\Delta + 2\delta},$$

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 6:

Sea G un grafo de orden n con vértice de mayor grado Δ y vértice de menor grado δ. Si $\Delta - \delta \geq 2$. Entonces

$$s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta - \delta)^2 + 2\Delta + 2\delta}, \tag{8}$$

y de lo contrario (cuando $\Delta - \delta \leq 1$)

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 6:

Sea G un grafo de orden n con vértice de mayor grado Δ y vértice de menor grado δ. Si $\Delta - \delta \geq 2$. Entonces

$$s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta - \delta)^2 + 2\Delta + 2\delta}, \tag{8}$$

y de lo contrario (cuando $\Delta - \delta \leq 1$)

$$s_Q(G) \geq 2\sqrt{\Delta}, \tag{9}$$

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 6:

Sea G un grafo de orden n con vértice de mayor grado Δ y vértice de menor grado δ. Si $\Delta - \delta \geq 2$. Entonces

$$s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta - \delta)^2 + 2\Delta + 2\delta}, \tag{8}$$

y de lo contrario (cuando $\Delta - \delta \leq 1$)

$$s_Q(G) \geq 2\sqrt{\Delta}, \tag{9}$$

y la igualdad se cumple para $G \cong K_2$.

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Demostración del Teorema 6. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6) $\Rightarrow$ Teorema 4

Sea $Q_G = (q_{ij})_{n\times n}$ la matriz Laplaciana sin signo de G. Entonces Q_G es una matriz normal y por el Teorema 4

$$s_Q(G) \geq \Upsilon,$$

Demostración del Teorema 6. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6) $\Rightarrow$ Teorema 4

Sea $Q_G = (q_{ij})_{n\times n}$ la matriz Laplaciana sin signo de G. Entonces Q_G es una matriz normal y por el Teorema 4

$$s_Q(G) \geq \Upsilon,$$

donde

$$\Upsilon = \max_{i,j} \sqrt{(q_{ii}-q_{jj})^2 + 2\sum_{s\neq i}|q_{is}|^2 + 2\sum_{s\neq j}|q_{js}|^2}$$

Demostración del Teorema 6. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6) $\Rightarrow$ Teorema 4

Sea $Q_G = (q_{ij})_{n\times n}$ la matriz Laplaciana sin signo de G. Entonces Q_G es una matriz normal y por el Teorema 4

$$s_Q(G) \geq \Upsilon,$$

donde

$$\begin{aligned}\Upsilon &= \max_{i,j}\sqrt{(q_{ii}-q_{jj})^2 + 2\sum_{s\neq i}|q_{is}|^2 + 2\sum_{s\neq j}|q_{js}|^2}\\ &= \max_{i,j}\sqrt{(d_i-d_j)^2 + 2(d_i+d_j)}.\end{aligned}$$

Demostración del Teorema 6. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ (6) $\Rightarrow$ Teorema 4

Sea $Q_G = (q_{ij})_{n\times n}$ la matriz Laplaciana sin signo de G. Entonces Q_G es una matriz normal y por el Teorema 4

$$s_Q(G) \geq \Upsilon,$$

donde

$$\begin{aligned}\Upsilon &= \max_{i,j}\sqrt{(q_{ii}-q_{jj})^2 + 2\sum_{s\neq i}|q_{is}|^2 + 2\sum_{s\neq j}|q_{js}|^2} \\ &= \max_{i,j}\sqrt{(d_i-d_j)^2 + 2(d_i+d_j)}.\end{aligned}$$

Además, al fijar $d_j - d_i$ a algún número $k \in \{0, 1, \ldots, \Delta - \delta\}$,

Demostración del Teorema 6. $\left(s(A)^2 \geq \max_{i,j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2\right\}\right)$ $(6) \Rightarrow$ Teorema 4

Sea $Q_G = (q_{ij})_{n\times n}$ la matriz Laplaciana sin signo de G. Entonces Q_G es una matriz normal y por el Teorema 4

$$s_Q(G) \geq \Upsilon,$$

donde

$$\begin{aligned}\Upsilon &= \max_{i,j}\sqrt{(q_{ii}-q_{jj})^2 + 2\sum_{s\neq i}|q_{is}|^2 + 2\sum_{s\neq j}|q_{js}|^2} \\ &= \max_{i,j}\sqrt{(d_i-d_j)^2 + 2(d_i+d_j)}.\end{aligned}$$

Además, al fijar $d_j - d_i$ a algún número $k \in \{0, 1, \ldots, \Delta - \delta\}$, se tiene

$$\Upsilon = \max_{k}\max_{d_j-d_i=k}\sqrt{(d_j-d_i)^2 + 2(d_j+d_i)}$$

Demostración del Teorema 6. $\left(s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta-\delta)^2+2\Delta+2\delta}\right)$ (8) $\left(s_Q(G) \geq 2\sqrt{\Delta}\right)$ (9)

$$\Upsilon = \max_{k} \max_{d_j - d_i = k} \sqrt{k^2 + 2(2d_i + k)}$$

Demostración del Teorema 6. $\left(s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta-\delta)^2 + 2\Delta + 2\delta}\right)$ (8) $\left(s_Q(G) \geq 2\sqrt{\Delta}\right)$ (9)

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \max_k \max_{d_j - d_i = k} \sqrt{k^2 + 2(2d_i + k)} \\ &= \max_k \sqrt{k^2 + 2((2\Delta - k) + k)}, \end{aligned}$$

Demostración del Teorema 6. $\left(s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta-\delta)^2+2\Delta+2\delta}\right)$ (8) $\left(s_Q(G) \geq 2\sqrt{\Delta}\right)$ (9)

$$
\begin{aligned}
\Upsilon &= \max_k \max_{d_j - d_i = k} \sqrt{k^2 + 2(2d_i + k)} \\
&= \max_k \sqrt{k^2 + 2((2\Delta - k) + k)}, \\
&= \max_k \sqrt{k^2 + 4\Delta - 2k}.
\end{aligned}
$$

Demostración del Teorema 6. $\left(s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta-\delta)^2+2\Delta+2\delta}\right)$ (8) $\left(s_Q(G) \geq 2\sqrt{\Delta}\right)$ (9)

$$
\begin{aligned}
\Upsilon &= \max_{k} \max_{d_j - d_i = k} \sqrt{k^2 + 2(2d_i + k)} \\
&= \max_{k} \sqrt{k^2 + 2((2\Delta - k) + k)}, \\
&= \max_{k} \sqrt{k^2 + 4\Delta - 2k}.
\end{aligned}
$$

Pero $k^2 - 2k + 4\Delta$ es un polinomio cuadrático convexo en k,

Demostración del Teorema 6. $\left(s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta-\delta)^2+2\Delta+2\delta}\right)$ (8) $\left(s_Q(G) \geq 2\sqrt{\Delta}\right)$ (9)

$$
\begin{aligned}
\Upsilon &= \max_{k} \max_{d_j - d_i = k} \sqrt{k^2 + 2(2d_i + k)} \\
&= \max_{k} \sqrt{k^2 + 2((2\Delta - k) + k)}, \\
&= \max_{k} \sqrt{k^2 + 4\Delta - 2k}.
\end{aligned}
$$

Pero $k^2 - 2k + 4\Delta$ es un polinomio cuadrático convexo en k, se tiene que su máximo sobre $k \in \{0, 1, \ldots, \Delta - \delta\}$.

Demostración del Teorema 6. $\left(s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta-\delta)^2+2\Delta+2\delta}\right)$ (8) $\left(s_Q(G) \geq 2\sqrt{\Delta}\right)$ (9)

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \max_k \max_{d_j-d_i=k} \sqrt{k^2+2(2d_i+k)} \\ &= \max_k \sqrt{k^2+2((2\Delta-k)+k)}, \\ &= \max_k \sqrt{k^2+4\Delta-2k}. \end{aligned}$$

Pero $k^2-2k+4\Delta$ es un polinomio cuadrático convexo en k, se tiene que su máximo sobre $k \in \{0,1,\ldots,\Delta-\delta\}$.
Por lo tanto,

$$\Upsilon = \max\{2\sqrt{\Delta}, \sqrt{(\Delta-\delta)^2+2(\Delta+\delta)}\},$$

se da el resultado deseado.

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 7:

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 7:

Sea G un grafo de orden n con vértice de mayor grado Δ y vértice de menor grado δ. Entonces

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 7:

Sea G un grafo de orden n con vértice de mayor grado Δ y vértice de menor grado δ. Entonces

$$s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta - \delta)^2 + 2\Delta + 2\delta + 1}. \tag{10}$$

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 7:

Sea G un grafo de orden n con vértice de mayor grado Δ y vértice de menor grado δ. Entonces

$$s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta - \delta)^2 + 2\Delta + 2\delta + 1}. \tag{10}$$

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Demostración del Teorema 7. $\left(s^2(A) \geq \max_{i \neq j} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2 \sum_{k \neq i}^{n} |a_{ik}|^2 + 2 \sum_{k \neq j}^{n} |a_{jk}|^2 + e_{ij} \right\} \right)$ (7)

Sea $Q_G = (q_{ij})_{n \times n}$ la matriz Laplaciana sin signo de G.

Demostración del Teorema 7. $\left(s^2(A) \geq \max_{i \neq j} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2 \sum_{k \neq i}^{n} |a_{ik}|^2 + 2 \sum_{k \neq j}^{n} |a_{jk}|^2 + e_{ij} \right\}\right)$ (7)

Sea $Q_G = (q_{ij})_{n \times n}$ la matriz Laplaciana sin signo de G. Entonces Q_G es una matriz simétrica y por el Teorema 5 (ecuación (7)), se tiene

$$s_Q(G) \geq \Gamma,$$

Demostración del Teorema 7. $\left(s^2(A) \geq \max_{i\neq j}\left\{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 2\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|^2 + 2\sum_{k\neq j}^{n}|a_{jk}|^2 + e_{ij}\right\}\right)$ (7)

Sea $Q_G = (q_{ij})_{n\times n}$ la matriz Laplaciana sin signo de G. Entonces Q_G es una matriz simétrica y por el Teorema 5 (ecuación (7)), se tiene

$$s_Q(G) \geq \Gamma,$$

donde

$$\Gamma = \max_{i\neq j}\sqrt{(q_{ii}-q_{jj})^2 + 2\sum_{s\neq i}|q_{is}|^2 + 2\sum_{s\neq j}|q_{js}|^2 + e_{ij}},$$

Demostración del Teorema 7. $\left(s^2(A) \geq \max_{i \neq j} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2\sum_{k \neq i}^{n} |a_{ik}|^2 + 2\sum_{k \neq j}^{n} |a_{jk}|^2 + e_{ij} \right\}\right)$ (7)

Sea $Q_G = (q_{ij})_{n \times n}$ la matriz Laplaciana sin signo de G. Entonces Q_G es una matriz simétrica y por el Teorema 5 (ecuación (7)), se tiene

$$s_Q(G) \geq \Gamma,$$

donde

$$\Gamma = \max_{i \neq j} \sqrt{(q_{ii} - q_{jj})^2 + 2\sum_{s \neq i} |q_{is}|^2 + 2\sum_{s \neq j} |q_{js}|^2 + e_{ij}},$$

e_{ij} y f_{ij} son los dados en el Teorema 5.

Demostración del Teorema 7. $\left(s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta - \delta)^2 + 2\Delta + 2\delta + 1}\right)$ (10)

Demostración del Teorema 7. $\left(s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta-\delta)^2+2\Delta+2\delta+1}\right)$ (10)

Si $q_{j_0j_0} = q_{i_0i_0}$, entonces $e_{i_0j_0} = 2f_{i_0j_0}$; de otra manera

$$e_{i_0j_0} = \text{mín}\left\{(q_{i_0i_0} - q_{j_0j_0})^2 + 2|(q_{i_0i_0} - q_{j_0j_0})^2 - f_{i_0j_0}|, \frac{f_{i_0j_0}^2}{(q_{i_0i_0} - q_{j_0j_0})^2}\right\},$$

Demostración del Teorema 7. $\left(s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta-\delta)^2+2\Delta+2\delta+1}\right)$ (10)

Si $q_{j_0j_0} = q_{i_0i_0}$, entonces $e_{i_0j_0} = 2f_{i_0j_0}$; de otra manera

$$e_{i_0j_0} = \text{mín}\left\{(q_{i_0i_0} - q_{j_0j_0})^2 + 2|(q_{i_0i_0} - q_{j_0j_0})^2 - f_{i_0j_0}|, \frac{f_{i_0j_0}^2}{(q_{i_0i_0} - q_{j_0j_0})^2}\right\},$$

con

$$f_{i_0j_0} = \left|\sum_{k\neq i_0} |q_{i_0k}|^2 - \sum_{k\neq j_0} |q_{j_0k}|^2\right| = |d(v_{i_0}) - d(v_{j_0})| = \Delta - \delta.$$

Demostración del Teorema 7. $\left(s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta-\delta)^2+2\Delta+2\delta+1}\right)$ (10)

Si $q_{j_0j_0} = q_{i_0i_0}$, entonces $e_{i_0j_0} = 2f_{i_0j_0}$; de otra manera

$$e_{i_0j_0} = \mathrm{mín}\left\{(q_{i_0i_0} - q_{j_0j_0})^2 + 2|(q_{i_0i_0} - q_{j_0j_0})^2 - f_{i_0j_0}|, \frac{f_{i_0j_0}^2}{(q_{i_0i_0} - q_{j_0j_0})^2}\right\},$$

con

$$f_{i_0j_0} = \left|\sum_{k\neq i_0} |q_{i_0k}|^2 - \sum_{k\neq j_0} |q_{j_0k}|^2\right| = |d(v_{i_0}) - d(v_{j_0})| = \Delta - \delta.$$

Así,

$$e_{i_0j_0} = \mathrm{mín}\{(\Delta-\delta)^2 + 2|(\Delta-\delta)^2 - (\Delta-\delta)|, 1\} = 1.$$

Demostración del Teorema 7. $\left(s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta-\delta)^2+2\Delta+2\delta+1}\right)$ (10)

Si $q_{j_0j_0} = q_{i_0i_0}$, entonces $e_{i_0j_0} = 2f_{i_0j_0}$; de otra manera

$$e_{i_0j_0} = \min\left\{(q_{i_0i_0}-q_{j_0j_0})^2 + 2|(q_{i_0i_0}-q_{j_0j_0})^2 - f_{i_0j_0}|, \frac{f_{i_0j_0}^2}{(q_{i_0i_0}-q_{j_0j_0})^2}\right\},$$

con

$$f_{i_0j_0} = \left|\sum_{k\neq i_0}|q_{i_0k}|^2 - \sum_{k\neq j_0}|q_{j_0k}|^2\right| = |d(v_{i_0}) - d(v_{j_0})| = \Delta-\delta.$$

Así,

$$e_{i_0j_0} = \min\{(\Delta-\delta)^2 + 2|(\Delta-\delta)^2-(\Delta-\delta)|, 1\} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\Gamma \geq \sqrt{(\Delta-\delta)^2+2\Delta+2\delta+1}.$$

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Corolario 7.1:

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Corolario 7.1:

Sea G un grafo $k-$regular. Entonces

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Corolario 7.1:

Sea G un grafo $k-$regular. Entonces $s_Q(G) \geq \sqrt{4k+1}$

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Corolario 7.1:

Sea G un grafo $k-$regular. Entonces $s_Q(G) \geq \sqrt{4k+1}$

Demostración:

Tomando la ecuación (10)

$$s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta - \delta)^2 + 2\Delta + 2\delta + 1},$$

con $\Delta = \delta = k$.

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 8:

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 8:

Sea G un grafo conectado con $n \geq 2$ vértices. Entonces

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Cota inferior para $s_Q(G)$ (Establecida)[13]

Teorema 8:

Sea G un grafo conectado con $n \geq 2$ vértices. Entonces

$$s_Q(G) \geq \frac{2}{n}\sqrt{nM_1(G) - 4m^2 + 2mn}. \tag{11}$$

[13] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. Submitted to Linear Algebra and its Applications, 2017

Demostración del Teorema 8. $\left(s_Q(G) \geq \frac{2}{n}\sqrt{nM_1(G) - 4m^2 + 2mn}\right)$ (11)

Para esta demostración se usará la desigualdad[6] con $a_i = 1$ y $b_i = q_i$, para $1 \leq i \leq n$.

[6] S. Izumino and Y. Seo. Ozeki's inequality and noncommutative covariance. Nihonkai Math. J., 8:55-58, 1997.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \frac{n^2}{4}(M_1M_2 - m_1m_2)^2.$$

Demostración del Teorema 8. $\left(s_Q(G) \geq \frac{2}{n}\sqrt{nM_1(G) - 4m^2 + 2mn}\right)$ (11)

Para esta demostración se usará la desigualdad[6] con $a_i = 1$ y $b_i = q_i$, para $1 \leq i \leq n$. Donde $0 < 1 \leq a_i \leq 1$, y $0 < q_n \leq b_i \leq q_1$, $1 \leq i \leq n$.

[6] S. Izumino and Y. Seo. Ozeki's inequality and noncommutative covariance. Nihonkai Math. J., 8:55-58, 1997.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \frac{n^2}{4}(M_1M_2 - m_1m_2)^2.$$

Demostración del Teorema 8. $\left(s_Q(G) \geq \frac{2}{n}\sqrt{nM_1(G) - 4m^2 + 2mn}\right)$ (11)

Para esta demostración se usará la desigualdad[6] con $a_i = 1$ y $b_i = q_i$, para $1 \leq i \leq n$.
Donde $0 < 1 \leq a_i \leq 1$, y $0 < q_n \leq b_i \leq q_1$, $1 \leq i \leq n$.
Entonces $M_1 M_2 = 1q_1$ y $m_1 m_2 = 1q_n$. Por la desigualdad, se tiene

[6] S. Izumino and Y. Seo. Ozeki's inequality and noncommutative covariance. Nihonkai Math. J., 8:55-58, 1997.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \frac{n^2}{4}(M_1 M_2 - m_1 m_2)^2.$$

Demostración del Teorema 8. $\left(s_Q(G) \geq \frac{2}{n}\sqrt{nM_1(G) - 4m^2 + 2mn}\right)$ (11)

Para esta demostración se usará la desigualdad[6] con $a_i = 1$ y $b_i = q_i$, para $1 \leq i \leq n$.
Donde $0 < 1 \leq a_i \leq 1$, y $0 < q_n \leq b_i \leq q_1$, $1 \leq i \leq n$.
Entonces $M_1 M_2 = 1q_1$ y $m_1 m_2 = 1q_n$. Por la desigualdad, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} 1 \sum_{i=1}^{n} q_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)^2 \leq \frac{1}{4}n^2(q_1 - q_n)^2.$$

[6] S. Izumino and Y. Seo. Ozeki's inequality and noncommutative covariance. Nihonkai Math. J., 8:55-58, 1997.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \frac{n^2}{4}(M_1 M_2 - m_1 m_2)^2.$$

Demostración del Teorema 8. $\left(s_Q(G) \geq \frac{2}{n}\sqrt{nM_1(G) - 4m^2 + 2mn}\right)$ (11)

Para esta demostración se usará la desigualdad[6] con $a_i = 1$ y $b_i = q_i$, para $1 \leq i \leq n$.
Donde $0 < 1 \leq a_i \leq 1$, y $0 < q_n \leq b_i \leq q_1$, $1 \leq i \leq n$.
Entonces $M_1 M_2 = 1q_1$ y $m_1 m_2 = 1q_n$. Por la desigualdad, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} 1 \sum_{i=1}^{n} q_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)^2 \leq \frac{1}{4} n^2 (q_1 - q_n)^2.$$

Por lo tanto,

[6] S. Izumino and Y. Seo. Ozeki's inequality and noncommutative covariance. Nihonkai Math. J., 8:55-58, 1997.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \frac{n^2}{4}(M_1 M_2 - m_1 m_2)^2.$$

Demostración del Teorema 8. $\left(s_Q(G) \geq \frac{2}{n}\sqrt{nM_1(G) - 4m^2 + 2mn}\right)$ (11)

Para esta demostración se usará la desigualdad[6] con $a_i = 1$ y $b_i = q_i$, para $1 \leq i \leq n$.
Donde $0 < 1 \leq a_i \leq 1$, y $0 < q_n \leq b_i \leq q_1$, $1 \leq i \leq n$.
Entonces $M_1 M_2 = 1q_1$ y $m_1 m_2 = 1q_n$. Por la desigualdad, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} 1 \sum_{i=1}^{n} q_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)^2 \leq \frac{1}{4}n^2(q_1 - q_n)^2.$$

Por lo tanto,

$$n(2m + M_1(G)) - 4m^2 \quad \leq \quad \frac{1}{4}n^2(q_1 - q_n)^2$$

[6] S. Izumino and Y. Seo. Ozeki's inequality and noncommutative covariance. Nihonkai Math. J., 8:55-58, 1997.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \frac{n^2}{4}(M_1 M_2 - m_1 m_2)^2.$$

Demostración del Teorema 8. $\left(s_Q(G) \geq \frac{2}{n}\sqrt{nM_1(G) - 4m^2 + 2mn}\right)$ (11)

Para esta demostración se usará la desigualdad[6] con $a_i = 1$ y $b_i = q_i$, para $1 \leq i \leq n$. Donde $0 < 1 \leq a_i \leq 1$, y $0 < q_n \leq b_i \leq q_1$, $1 \leq i \leq n$.
Entonces $M_1 M_2 = 1q_1$ y $m_1 m_2 = 1q_n$. Por la desigualdad, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} 1 \sum_{i=1}^{n} q_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)^2 \leq \frac{1}{4} n^2 (q_1 - q_n)^2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} n(2m + M_1(G)) - 4m^2 &\leq \frac{1}{4} n^2 (q_1 - q_n)^2 \\ \frac{8m + 4M_1(G)}{n} - \frac{16m^2}{n^2} &\leq s_Q^2(G) \end{aligned}$$

[6] S. Izumino and Y. Seo. Ozeki's inequality and noncommutative covariance. Nihonkai Math. J., 8:55-58, 1997.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \frac{n^2}{4}(M_1 M_2 - m_1 m_2)^2.$$

AGENDA

1. Preliminares
   - Notaciones
   - Definiciones
   - Propiedades
     - Matrices asociadas a un grafo G
     - ✓ A_G ✓ L_G ✓ Q_G
     - ✓ Espectro ✓ Amplitud
2. Distintas cotas para las amplitudes del espectro de matrices asociadas a un grafo
   - Cotas superiores
     - ✓ Para $s(A)$ de Mirsky
     - ✓ Para $s_L(G)$ de Chen & Das
     - ✓ Para $s_Q(G)$ (Establecida)
   - Cotas inferiores
     - ✓ Para $s(A)$ de Barnes & Hoffman
     - ✓ Para $s(A)$ de Jiang & Zhan
     - ✓ Para $s_Q(G)$ (Establecida)
3. Comparación
4. Conclusiones

Tabla comparativa de cotas inferiores[10]

	n	m	Δ	δ	$l_{2,2}$	$l_{2,3}$	s_{10}	s_{11}	**Amplitud**
	40	519	32	20	26.99	21.38	11.81	15.77	36.03
$K_{1,3}$	4	3	3	1	3.18	4	3	3.16	3.46
K_5	5	10	4	4	5	5	4	4.12	5

$$l_{2,2} \quad : \quad s_Q(G) \geq \frac{M_1(G)}{m} - \sqrt{\frac{2m^3 + m^2 M_1(G) - M_1^2(G)}{(n-1)m^2}} \qquad G \cong K_n$$

$$l_{2,3} \quad : \quad s_Q(G) \geq \frac{1}{n-1}\sqrt{(n\Delta)^2 + 8(m-\Delta)(2m-n\Delta)} \qquad G \cong K_n$$

$$s_{10} \quad : \quad s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta-\delta)^2 + 2\Delta + 2\delta + 1}$$

$$s_{11} \quad : \quad s_Q(G) \geq \frac{2}{n}\sqrt{nM_1(G) - 4m^2 + 2mn}$$

[10] M. Liu and B. Liu. The signless Laplacian spread. Linear Algebra Appl, 432:505-514, 2010.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudió la amplitud del espectro Laplaciano sin signo de un grafo G, para ello se vio la definición de un grafo, sus propiedades, algunas de sus clasificaciones, las diversas matrices asociadas a este y resultados clásicos necesarios para el desarrollo de los objetivos trazados. Se realizaron revisiones bibliográficas para la amplitud de una matriz, amplitud del espectro Laplaciano y Laplaciano sin signo de un grafo y se mostraron resultados relevantes sobre las cotas inferiores y superiores de la amplitud del espectro Laplaciano sin signo de un grafo y se observó el ajuste que tienen. Por ello se propone seguir trabajando en cotas inferiores y superiores que den mejores aproximaciones y cumplan la igualdad para una gran cantidad de grafos.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudió la amplitud del espectro Laplaciano sin signo de un grafo G, para ello se vio la definición de un grafo, sus propiedades, algunas de sus clasificaciones, las diversas matrices asociadas a este y resultados clásicos necesarios para el desarrollo de los objetivos trazados. Se realizaron revisiones bibliográficas para la amplitud de una matriz, amplitud del espectro Laplaciano y Laplaciano sin signo de un grafo y se mostraron resultados relevantes sobre las cotas inferiores y superiores de la amplitud del espectro Laplaciano sin signo de un grafo y se observó el ajuste que tienen. Por ello se propone seguir trabajando en cotas inferiores y superiores que den mejores aproximaciones y cumplan la igualdad para una gran cantidad de grafos.

¡Gracias por su atención!