Ma3101 Elementos de Álgebra	**15 de Noviembre, 2014**

Control 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: B. Ruiz, A. Turkieltaub*

TIEMPO 4.5 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- (1.0 pts) Sea u una raíz del polinomio irreducible $x^3 + 3x + 3$ sobre $\mathbb{Q}$. En $\mathbb{Q}(u)$, exprese $(7 - 2u + u^2)^{-1}$ en la forma $\alpha + \beta u + \gamma u^2$, donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$.

(ii).- (1.0 pts) Muestre que $f(x) = x^2 + x - 1$ es irreducible sobre $\mathbb{Z}_3$, pero admite dos raíces en el cuerpo $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$.

(iii).- (1.0 pts) Determinar $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{6})]$. Justifique.

(iv).- (1.0 pts) Pruebe que si u y v son trascendentes sobre $\mathbb{Q}$, entonces ya sea uv o $u + v$ es trascendente sobre $\mathbb{Q}$.

(v).- (1.0 pts) Identificar una base del cuerpo de descomposición de $x^6 - 4$ sobre $\mathbb{Q}$.

(vi).- (1.0 pts) Considere el polinomio $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$. Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo de descomposición de $P(x)$ sobre $\mathbb{F}_2$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ una raíz de $P(x)$. Exprese $P(x)$ como producto de polinomios irreducibles sobre $\mathbb{F}_2(\alpha)$.

PROBLEMA 2: En lo que sigue, $\mathbb{F}$, $\mathbb{E}$ y $\mathbb{K}$ denotan cuerpos. Además, $\mathbb{E}$ es extensión de $\mathbb{F}$.

(i).- Sea $\sigma : \mathbb{F} \to \mathbb{K}$ morfismo de cuerpos y $a \in \mathbb{E}$ algebráico sobre $\mathbb{F}$ con polinomio minimal $P(x) \in \mathbb{F}[x]$. Pruebe que para $b \in \mathbb{K}$, raíz del polinomio $P^\sigma(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma(p_n)x^n$, se tienen las siguientes propiedades:

> (i.1).- (1.0 pts) $\exists! \tau_b : \mathbb{F}(a) \to \mathbb{K}$, $\tau_b|_{\mathbb{F}} = \sigma$ y $\tau(a) = b$ morfismo de cuerpos.
>
> (i.2).- (1.0 pts) Si $\tau : \mathbb{F}(a) \to \mathbb{K}$ es tal que $\tau|_{\mathbb{F}} = \sigma$, entonces $\tau = \tau_b$ para algún $b \in \mathbb{K}$ raíz de $P^\sigma(x) \in \mathbb{K}[x]$.

(ii).- Denotamos por $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbb{E})$ el grupo de automorfismos de cuerpos $\sigma : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ que fijan $\mathbb{F}$, i.e., tales que $\sigma|_{\mathbb{F}} = id_{\mathbb{F}}$.

> (ii.1).- (1.0 pts) Pruebe que si $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbb{E})$ y $P(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{F}$, entonces σ es una permutación del conjunto $\{\alpha \in \mathbb{E} : P(\alpha) = 0\}$, y use esta propiedad para determinar $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ y $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$.

(ii.2).- (1.5 pts) Pruebe que si $\mathbb{E}$ es algebráico sobre $\mathbb{F}$ y $\sigma : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ es un morfismo de cuerpos que fija $\mathbb{F}$, entonces $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbb{E})$.

Indicación: Observe (y use) que si $[\mathbb{E} : \mathbb{F}] < \infty$, entonces la afirmación es un resultado de álgebra lineal que da condiciones para que una función $\mathbb{F}$-lineal sea sobreyectiva.

(ii.3).- (1.5 pts) Pruebe que si $\mathbb{E}$ es cuerpo de descomposición del polinomio $P(x) \in \mathbb{F}[x]$, entonces $|\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbb{E})| \leq [\mathbb{E} : \mathbb{F}]$.

Indicación: Proceda por inducción en $[\mathbb{E} : \mathbb{F}]$.