MA-34A Prob. y Proc. Estocásticos **16 de Agosto, 2004**

Pauta Control No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliares: R. Cortez, M. Soto*

-0.3 por error aritmético en P1

PROBLEMA 1:

(i).- Sea $\mathcal{E}_i$ el experimento que consiste en que X elije un programa de noticias el día i, $i \in \{1,2,3,4\}$. Claramente, hay $n_1 = 5$, $n_2 = 4$, $n_3 = 3$ y $n_4 = 2$ alternativas para $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ y $\mathcal{E}_4$ respectivamente. La cantidad de secuencias posible de programas con sólo noticias corresponde a la realización conjunta de los $\mathcal{E}_i$'s. Luego, por el principio generalizado del conteo hay $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 120$ alternativas posibles. 1.0 def. exprts. 1.0 pts aplic. princip.

(ii).- Un argumento similar al de la parte (i) permite concluir que hay $7^4 = 2401$ secuencias posibles de programas que X podría escuchar. Le descontaremos a esta cantidad la cantidad de secuencias en que X escucha a lo más un programa de noticias, y así obtendremos la respuesta solicitada. 0.4 por sec. posibl.

Ahora, notar que si X escucha a lo más un programa de noticias, entonces puede ocurrir alguno de los siguientes 5 casos: 0.5 por paso al complem. 0.5 por separar en casos

- X no escucha ningún programa de noticias ($n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 120$ formas posibles).
- X escucha noticias sólo el jueves ($(7-n_1) \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 300$ formas posibles).
- X escucha noticias sólo el jueves ($n_1 \cdot (7-n_2) \cdot n_3 \cdot n_4 = 160$ formas posibles). 0.4 por cálculos
- X escucha noticias sólo el jueves ($n_1 \cdot n_2 \cdot (7-n_3) \cdot n_4 = 90$ formas posibles).
- X escucha noticias sólo el jueves ($n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot (7-n_4) = 48$ formas posibles).

Hay entonces $120+300+160+90+48 = 718$ secuencia de programas de jueves a domingo a lo más uno de los cuales es de noticias. 0.2 por concluir.

Sigue que hay $2401 - 718 = 1683$ secuencias en que X escucha al menos dos programas de noticias.

(iii).- Consideraremos tres experimentos, $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}'_1$, donde $\mathcal{E}_0$ consiste en elegir los dos días en que se realizarán las grabaciones ($n_0 = \binom{4}{2}$ posibilidades), y $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}'_1$ consisten en seleccionar los tres programas a grabar el primer y el segundo día de grabación respectivamente ($n_1 = n'_1 = \binom{7}{3}$ posibilidaes). La realización simultánea de los tres experimentos descritos corresponde a los posibles grupos de grabaciones, que por el principio generalizado del conteo serán: 0.8 por def. exprts. 0.4 por n_0. 0.4 por n_1, n'_1.

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{3}^2 = 6 \cdot 35^2 = 7350.$$

0.4 aplic. princip.

PROBLEMA 2:

(i).- Una distribución de las bolas en las urnas corresponde a una función $f : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,m\}$ donde 1.0 pts

$f(i) = j$ se interpreta como que la i–ésima bola se coloca en la urna j.

(ii.1).- Las posibles distribuciones corresponden a permutaciones de bolas. Luego, hay $n!$ distribuciones posibles. `1.0 pts`

(ii.2).- Para $i \in \{1,\ldots,n\}$, sea $\mathcal{E}_i$ el experimento que consite en asignarle una urna a la i–ésima bola de forma que ella no quede en la urna i. Claramente hay $(m-1)$ posibles resultados para $\mathcal{E}_i$. El resultado de la realización simultánea de los n experimentos es una distribución de las bolas en las urnas de manera que la bola i no quede en la urna i. Del principio generalizado del conteo sigue que hay $(m-1)^n$ formas en que esto último puede ocurrir. `0.5 def. exprts. 0.5 aplic. princip.`

(ii.3).- Hay $\binom{m}{n}$ formas de elegir las n urnas $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$ donde colocar las bolas. `0.5 pts`

Sea n_i la bola que se coloca en la urna m_i. Claramente, $n_1 < n_i$ para todo $i \in \{2,\ldots,n\}$. Además los n_i's son todos distintos y están en $\{1,\ldots,n\}$. Luego, el único caso factible es $n_1 = 1$. Un argumento similar permite concluir que $n_2 = 2$, y en general que $n_i = i$. Por lo tanto, una vez elegidas las n urnas donde se colocarán las bolas, hay una única forma de distribuir las bolas en dichas urnas. `0.5 pts`

En resumen, hay $\binom{m}{n}$ formas de distribuir las n bolas en las m urnas de manera que se satisfaga la condición del enunciado.

(ii.4).- Sea E_i el conjunto de las distribuciones de las bolas en las urnas tales que la urna i queda vacía, $i \in \{1,2,3\}$. Es fácil ver que $|E_i| = 2^n$ y que $|E_iE_j| = 1$ si $1 \le i < j \le 3$. Además, $E_1E_2E_3 = \emptyset$. Luego, de la indicación, se tiene que `0.4 def.` E_i `0.4 por` $|E_i|$

$$|E_1 \cup E_2 \cup E_3| = 3 \cdot 2^n - 3 = 3(2^n - 1)\,.$$

Finalmente, observar que $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ corresponde exactamente al conjunto de distribuciones en que alguna de las urna $i \in \{1,2,3\}$ queda vacía. `0.2 por concl.`

(iii).- Las propiedades son, respectivamente: (ii.1) biyectivas, (ii.2) sin puntos fijos, (ii.3) crecientes, y (ii.4) no epiyectivas. `0.25 por c/u`

PROBLEMA 3:

(i).- Debemos verificar que: $\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega) = 1$ y si $\{E_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de eventos disjunta dos a dos, entonces $\widetilde{\mathbb{P}}(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathbb{P}}(E_n)$. En efecto, `1.5 por def.` $\mathbb{P}$

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(E)} = 1\,.$$ `0.5`

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{P}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= \frac{1}{\mathbb{P}(E)} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \cap E\right) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(E)} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n \cap E)\right) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(E)} \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(E_n \cap E) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathbb{P}}(E_n)\,,
\end{aligned}$$ `1.0`

donde la primera y la última igualdad se tienen de la definción de $\widetilde{\mathbb{P}}$, la segunda igualdad se tiene por álgebra de conjuntos, y la tercera igualdad se tiene por σ–aditividad de $\mathbb{P}(\cdot)$.

(ii).- Asumamos que $\mathbb{P}(A\Delta B) = 0$. Sigue que

$$0 = \mathbb{P}(A\Delta B) = \mathbb{P}(A \setminus B \dot\cup B \setminus A) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) \,,$$

donde la segunda igualdad se tiene por álgebra de conjuntos y la tercera por aditividad de $\mathbb{P}(\cdot)$. Luego, como $\mathbb{P}(A \setminus B), \mathbb{P}(B \setminus A) \geq 0$, se debe tener que

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(B \setminus A) = 0 \,. \tag{1}$$

1.5 hasta aquí

De esta última conclusión sólo ocuparemos la primera igualdad. En efecto, observar que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \setminus B \dot\cup \cap B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \setminus B \dot\cup \cap B) = \mathbb{P}(B) \,,\end{aligned}$$

1.5 por el resto

donde la segunda y la cuarta igualdad se tienen por aditividad de $\mathbb{P}(\cdot)$ y la tercera igualdad por (1).