Ma34a Probabilidades y Procesos Estocásticos **12 de Agosto de 2004**

Resumen No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliares: M. Soto, R. Cortez*

1 Análisis Combinatorial

Lema 1 **[Principio Generalizado del Conteo]** *Dados r experimentos $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_r$ tales que para cada n_{i-1} posibles resultados de $\mathcal{E}_{i-1}$ hay n_i posibles resultados de $\mathcal{E}_i$, se tiene que hay $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$ posibles distintos resultados que se pueden obtener de la realización conjunta de los r experimentos.*

Proposición 1 *Hay $n!$ distintas permutaciones (ordenamientos) de n objetos distinguibles.*

Proposición 2 *Sea $n \geq k$. Con n objetos distinguibles se pueden formar $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ distintos ordenamientos de largo k.*

Proposición 3 *Sea $n \geq k$. Con n objetos distinguibles se pueden formar $\dbinom{n}{k}$ subpoblaciones distintas de cardinalidad k.*

Definición 1 *Sean $n, n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ tales que $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$. Se define el coeficiente multinomial $\dbinom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$.*

Lema 2 *Sea $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$. Hay $\dbinom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ formas de distribuir n bolas distinguibles en r urnas distinguibles de forma que en la i-ésima urna queden n_i bolas.*

Lema 3 *Sea $r > 0$. Hay $\dbinom{n+r-1}{r-1} = \dbinom{n+r-1}{n}$ formas de distribuir n bolas indistinguibles en r urnas distinguibles.*

Lema 4 *Sea $n \geq r > 0$. Hay $\dbinom{n-1}{r-1}$ formas de distribuir n bolas indistinguibles en r urnas distinguibles de forma que ninguna urna quede vacía.*

2 Teoría Axiomática de Probabilidades

Definición 2 **[Medida de Probabilidad]** *Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una familia de eventos de interés (técnicamente una σ-álgebra). Decimos que $\mathbb{P}(\cdot)$ es una medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ si $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$ es tal que*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. [**σ-aditividad**] *si* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una colección de eventos disjuntos, i.e. tales que* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$, *se tiene que* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$.

A la tripleta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *se le denomina espacio de probabilidad.*

Observación 1 *Si* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *es un espacio de probabilidad, entonces* $\mathbb{P}(\cdot)$ *sólo está definida sobre* $\mathcal{F}$. *En rigor, deberíamos tener cuidado de evaluar* $\mathbb{P}(\cdot)$ *sólo en aquellos conjuntos* E *pertenecientes a* $\mathcal{F}$. *En este curso no nos preocuparemos de esto, asumiremos que todo funciona bien, o en otras palabras que cada vez que estemos evaluando* $\mathbb{P}(\cdot)$ *en algún conjunto* E *dicho conjunto pertenece a* $\mathcal{F}$.

Proposición 4 *Se tiene que;*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
2. *para todo evento* E *se tiene que* $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$,
3. *si* E *y* F *son eventos tales que* $E \subseteq F$, *entonces* $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$.
4. [**Aditividad finita**] *si* I *es un conjunto finito de índices y* $\{E_i\}_{i\in I}$ *una colección de eventos disjuntos, i.e.* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *para todo* $i \neq j$, *entonces* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(E_i)$.

Lema 5 [**Principio de Inclusión–exclusión**] *Si* $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ *es una colección de eventos entonces*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) - \sum_{i_1<i_2} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \cdots \\ &\quad + (-1)^{r+1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_r}) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(E_1 \cap \cdots \cap E_n)\ ,\end{aligned}$$

donde $\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_r})$ *se toma sobre todos los* $\binom{n}{r}$ *posibles subconjuntos de* $\{1, \ldots, n\}$ *de tamaño* r.

Lema 6 [**Desigualdad de Boole**] *Si* $\{E_i\}_{i\in I}$ *es una colección numerable de eventos, entonces*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \leq \sum_{i\in I} \mathbb{P}(E_i)\ .$$