Ma34a Probabilidades y Procesos Estocásticos **21 de Noviembre, 2004**

Resumen No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliares: M. Soto, R. Cortez*

1 Variables Aleatorias

1.1 Variables Aleatorias Absolutamente Continuas

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$

Definición 1 [Variable Aleatoria Absolutamente Continua] *Se dice que X es una variable aleatoria absolutamente continua si existe una función $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $C \subseteq \mathbb{R}$ para el cual $\{X \in C\} \in \mathcal{F}$ se tiene que*

$$\mathbb{P}(\{X \in C\}) \;=\; \int_C f_X(x)dx\,.$$

A la función f_X se le denomina función densidad de la variable aleatoria X.

Proposición 1 *Sea X una variable aleatoria absolutamente continua, se tiene que*

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx \;=\; 1$ *y* $\mathbb{P}(\{X = t\}) = 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

2. $\displaystyle F_X(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx$ *y si f_X es continua en t, entonces* $\displaystyle f_X(t) \;=\; \frac{d}{dt}F_X(t)$.

Proposición 2 *Si X es variable aleatoria y $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $\{x \in \mathbb{R} \,|\, h(x) \neq f_X(x)\}$ es numerable, entonces h también es función densidad de X, i.e., para todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$F_X(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx \;=\; \int_{-\infty}^{t} h(x)dx\,.$$

En particular, la función densidad de una variable aleatoria no es única.

Proposición 3 *Sea X una variable aleatoria absolutamente continua. Sean $D, R \subseteq \mathbb{R}$ tales que $\mathbb{R} \setminus f_X^{-1}(\{0\}) \subseteq D$ y $g\colon D \to R$ tal que $Y = g(X)$ es variable aleatoria (en particular esto ocurre cuando g es continua). Sigue que*

$$F_Y(t) \;=\; \mathbb{P}\left(\left\{X \in g^{-1}((-\infty, t])\right\}\right)\,.$$

Si además g es biyectiva y diferenciable, entonces Y es absolutamente continua y

$$f_Y(t) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(t)) \left| \dfrac{d}{dt} g^{-1}(t) \right| & \textit{si } t \in R, \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Modelos absolutamente continuos: A continuación se da la fórmula de la función densidad f_X y los parámetros de varias distribuciones importantes de variables aleatorias X absolutamente continuas.

Uniforme: X es una uniforme de parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, denotado $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b], \\ 0 & \text{en caso contrario}. \end{cases}$$

Exponencial: X es una exponencial de parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, denotado $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{en caso contrario}. \end{cases}$$

Normal: X es una normal de parámetros $\mu, \sigma^2 \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, denotado $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, si

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad \text{si } x \in \mathbb{R}.$$

Gama: X es una gama de parámetros $\lambda, p \in \mathbb{R}$, $\lambda, p > 0$, denotado $X \sim \text{Gama}(p, \lambda)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(p)} \lambda (\lambda x)^{p-1} e^{-\lambda x}, & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{en caso contrario}, \end{cases}$$

donde $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

Chi-cuadrado: X es una chi-cuadrado con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ grados de libertad, i.e., $X \sim \chi_n^2$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{en caso contrario}, \end{cases}$$

donde $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

Cauchy: X es una Cauchy de parámetro $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, denotado $X \sim \text{Cauchy}(\mu, \sigma)$, si

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sigma \left(1 + \frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2\right)}, \qquad \text{si } x \in \mathbb{R}.$$

Beta: X es una beta de parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, denotado $X \sim \text{Beta}(a, b)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{en caso contrario}, \end{cases}$$

donde $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

Proposición 4 *Si* $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ *y* Φ *denota la función distribución de una* $\text{Normal}(0,1)$, *entonces*

1. $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$ *cualquiera sea* $t \in \mathbb{R}$,
2. *si* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, *entonces* $aX + b \sim \text{Normal}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$, *en particular* $(X - \mu)/\sigma \sim \text{Normal}(0,1)$.

2 Distribución Conjunta de Variables Aleatorias

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$. Denotaremos por $\vec{X}$ al vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$, por $\vec{X}_i$ a su i–ésima coordenada X_i, y por $\vec{X}^{(-i)}$ al vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n)$.

Definición 2 **[Función Distribución Conjunta]** *A* $F_{\vec{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *se le llama función distribución conjunta de* $X_1, \ldots, X_n$ *si para todo* $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$,

$$F_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n) = \mathbb{P}\left(\{X_1 \le t_1, \ldots, X_n \le t_n\}\right).$$

Proposición 5 *Para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *y* $t_i \in \mathbb{R}$,

$$F_{X_i}(t_i) = \lim_{t_1 \to \infty} \ldots \lim_{t_{i-1} \to \infty} \lim_{t_{i+1} \to \infty} \ldots \lim_{t_n \to \infty} F_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n).$$

Definición 3 **[Funciones Distribución Marginales]** *A las funciones distribución* $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ *también se les denomina funciones distribución marginales de* $F_{\vec{X}}$.

Proposición 6 *Se tiene que:*

1. $F_{\vec{X}}$ *es no–decreciente en cada una de sus coordenadas,*
2. $\lim_{t_1 \to \infty} \ldots \lim_{t_n \to \infty} F_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n) = 1$, *y para todo* $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t_i \to -\infty} F_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n) = 0$$
$$\lim_{t_i \to \infty} F_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n) = F_{\vec{X}^{(-i)}}(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n).$$

Definición 4 [**Variables Aleatorias Conjuntamente Discretas**] *Se dice que* $X_1, \ldots, X_n$ *son variables aleatorias conjuntamente discretas si toman a lo más una cantidad numerable de valores distintos, i.e., si* $S_{\vec{X}} = \left\{\vec{a} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbb{P}\left(\left\{\vec{X} = \vec{a}\right\}\right) > 0\right\}$ *es numerable y* $\mathbb{P}\left(\vec{X} \in S_{\vec{X}}\right) = 1$. *Al conjunto* $S_{\vec{X}}$ *se le denomina soporte del vector aleatorio* $\vec{X}$ *y a la función* $p_{\vec{X}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ *tal que* $p_{\vec{X}}(\vec{a}) = \mathbb{P}\left(\left\{\vec{X} = \vec{a}\right\}\right)$ *se le denomina función densidad de probabilidad conjunta de* $X_1, \ldots, X_n$.

Proposición 7 *Sean* $X_1, \ldots, X_n$ *variables aleatorias conjuntamente discretas, se tiene que*

1. $\displaystyle\sum_{\vec{a} \in S_{\vec{X}}} p_{\vec{X}}(\vec{a}) = 1$ *y si* $\vec{a} \notin S_{\vec{X}}$ *entonces* $p_{\vec{X}}(\vec{a}) = 0$.
2. $\displaystyle F_{\vec{X}}(\vec{t}) = \sum_{\vec{a} \in S_{\vec{X}} : a_1 \leq t_1, \ldots, a_n \leq t_n} p_{\vec{X}}(\vec{a})$, *para todo* $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$.
3. $\displaystyle p_{X_i}(t_i) = \sum_{\vec{a} \in S_{\vec{X}} : \vec{a}_i = \vec{t}_i} p_{\vec{X}}(\vec{a})$, *para todo* $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$.

Definición 5 [**Funciones Densidad de Probabilidad Marginales**] *A las funciones densidad de probabilidad* $p_{X_1}, \ldots, p_{X_n}$ *también se les denomina funciones densidad de probabilidad marginales de* $p_{\vec{X}}$.

Definición 6 [**Variables Aleatorias Conjuntamente Continuas**] *Se dice que* $X_1, \ldots, X_n$ *son variables aleatorias conjuntamente continuas si existe una función* $f_{\vec{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que para todo* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *para el cual* $\left\{\vec{X} \in C\right\} \in \mathcal{F}$ *se tiene que*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\vec{X} \in C\right\}\right) = \int \cdots \int_C f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n .$$

A la función $f_{\vec{X}}$ *se le denomina función densidad conjunta de* $X_1, \ldots, X_n$.

Proposición 8 *Sean* $X_1, \ldots, X_n$ *variables aleatorias conjuntamente continuas, se tiene que*

1. $\displaystyle\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1$.
2. $\displaystyle F_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$ *para todo* $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$, *y si* $f_{\vec{X}}$ *es continua en* $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, *entonces* $\displaystyle f_{\vec{X}}(\vec{a}) = \frac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n} F_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n)\Big|_{\vec{t} = \vec{a}}$.
3. $\displaystyle f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n$ *para todo* $x_i \in \mathbb{R}$.

Definición 7 [**Funciones Densidad Marginales**] *A las funciones densidad de probabilidad* $f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}$ *también se les denomina funciones densidad marginales de* $f_{\vec{X}}$.

Definición 8 **[Variables Aleatorias Independientes]** *Se dice que $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes si para todo $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\{X_1 \in A_1\}, \ldots, \{X_n \in A_n\} \in \mathcal{F}$,*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\{X_i \in A_i\}\right) .$$

Una colección infinita de variables aleatorias se dice independiente si cualquier subcolección finita de ellas es independiente.

Lema 1 *$X_1, \ldots, X_n$ son independientes sí y sólo si $F_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t_i)$.*

Corolario 1 *$X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes sí y sólo si*

- $p_{\vec{X}}(\vec{a}) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(a_i)$ *para todo $\vec{a} \in S_{\vec{X}}$ en el caso que $X_1, \ldots, X_n$ sean conjuntamente discretas.*
- $f_{\vec{X}}(\vec{t}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(t_i)$ *para todo $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$ en el caso que $X_1, \ldots, X_n$ sean conjuntamente continuas.*

Lema 2 *Sea $I \subseteq \mathbb{N}$. Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una colección de variables aleatorias independientes y para todo $i \in I$ la función $g_i : D_i \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $\mathbb{P}(\{X_i \in D_i\}) = 1$ e $Y_i = g_i(X_i)$ es variable aleatoria, entonces $\{Y_i\}_{i \in I}$ es una colección de variables aleatorias independientes.*

Lema 3 **[Suma de Variables Aleatorias Independientes]** *Si X_1 e X_2 son variables aleatorias independientes, entonces*

- $p_{X_1+X_2}(c) = \sum_{a \in S_{X_1}} p_{X_1}(a) p_{X_2}(c-a) = \sum_{b \in S_{X_2}} p_{X_1}(c-b) p_{X_2}(b)$ *en el caso que X_1 y X_2 sean conjuntamente discretas,*
- $f_{X_1+X_2}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(x) f_{X_2}(t-x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(t-x) f_{X_2}(x) dx$ *en el caso que X_1 y X_2 sean conjuntamente continuas.*

Lema 4 *Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim \text{Normal}(\mu_i, \sigma_i^2)$, entonces $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Normal}(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$, y si además $X_1, \ldots, X_n$ son idénticamente distribuidas de acuerdo a una $\text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, entonces $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Normal}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.*

Lema 5 **[Método del Jacobiano]** *Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias conjuntamente continuas. Sean $D, R \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $\mathbb{P}(\{X \in D\}) = 1$ y $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_n) : D \to R$ tal que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $Y_i = g_i(X_1, \ldots, X_n)$ es variable aleatoria (en particular esto último ocurre cuando g_i es continua). Si además*

1. *$\vec{g}$ es biyección, i.e., para todo $(y_1, \ldots, y_n) \in R$, el sistema de ecuaciones $y_i = g_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, tiene solución única $x_i = h_i(y_1, \ldots, y_n)$.*

2. *las funciones $g_1, \ldots, g_n$ son tales que todas sus derivadas parciales son continuas y que el Jacobiano de $\vec{g}$ es no nulo para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in D$, i.e.,*

$$(x_1, \ldots, x_n) \in D \qquad \Longrightarrow \qquad J(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Det} \left(\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{array} \right) \Bigg|_{(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0 \,.$$

Entonces, se tiene que $Y_1, \ldots, Y_n$ son variables aleatorias conjuntamente continuas y

$$\begin{aligned} f_{\vec{Y}}(\vec{y}) &= \begin{cases} f_{\vec{X}}(\vec{g}^{\,-1}(\vec{y})) \left| J(\vec{g}^{\,-1}(\vec{y})) \right|^{-1}, & \textit{si } \vec{y} \in R, \\ 0, & \textit{en caso contrario.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_{\vec{X}}(\vec{h}(\vec{y})) \left| J(\vec{h}(\vec{y})) \right|^{-1}, & \textit{si } \vec{y} \in R, \\ 0, & \textit{en caso contrario.} \end{cases} \end{aligned}$$