MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **5 de Abril, 1999**

Pauta Control No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: M. Saez*

Problema 1:

(i).- Observar primero que $(F_m)_{m=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente de eventos. Luego su límite existe, de hecho

$$\lim_{m\to\infty} F_m \;=\; \bigcup_{m=0}^{\infty}\bigcup_{n=0}^{m} E_n \;=\; \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \,,$$

donde la primera igualdad sigue de la definición de límite de una sucesión creciente de eventos. Luego,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\lim_{m\to\infty} F_m\right) \;=\; \lim_{m\to\infty}\mathbb{P}\left(F_m\right) \;=\; \lim_{m\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{m} E_n\right) \;\leq\; \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\mathbb{P}\left(E_n\right) \,,$$

donde la segunda igualdad se debe a la continuidad de la función de probabilidad, la tercera igualdad es por definición de F_m, y la desigualdad se obtiene aplicando el caso finito de la desigualdad de Boole. Tomando el límite se obtiene la conclusión deseada.

(ii).- El modelo adecuado del experimento que consiste en lanzar dos dados perfectos viene dado por el espacio equiprobable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ donde

$$\Omega \;=\; \{(i,j) : i,j\in\{1,\ldots,6\}\}\,.$$

Hay muchos posibles pares de eventos que cumplen las propiedades deseadas. Veremos algunos.

1. Dos casos triviales de eventos independientes son $E = F = \Omega$ y $E = F = \emptyset$. Otro ejemplo es el caso en que E y F correspondan a los eventos "el primer dado sale 6" y "el segundo dado sale 6" respectivamente puesto que $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F) = 1/6$ y $\mathbb{P}(E\cap F) = 1/36$. En general, dado E' y F' en $\{1,\ldots,6\}$ los eventos E y F que corresponden a "el resultado del primer dado está en E'" y "el resultado del segundo dado está en F'" respectivamente son independientes puesto que $\mathbb{P}(E) = |E'|/6$, $\mathbb{P}(F) = |F'|/6$, y $\mathbb{P}(E\cap F) = |E'||F'|/36$. Un último ejemplo sería el caso en que E y F correspondan a los eventos "el primer dado sale 6" y "la suma de los dados es 7" puesto que $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F) = 1/6$ y $\mathbb{P}(E\cap F) = 1/36$.

2. Cualquier par de eventos disjuntos de probabilidad no nula nos dará un contraejemplo puesto que en este caso $0 = \mathbb{P}(E\cap F)/\mathbb{P}(E) < \mathbb{P}(F)$. Un ejemplo concreto es el caso en que E y F correspondan a los eventos "el primer dado sale 6" y "el primer dado sale 1" (aquí $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F) = 1/6$ y $\mathbb{P}(E\cap F) = 0$).

3. Cualquier par de eventos E y F tal que $E\subseteq F$ y $\mathbb{P}(F) < 1$ servirán de ejemplo puesto que en este caso $1 = \mathbb{P}(E\cap F)/\mathbb{P}(E) > \mathbb{P}(F)$. Un ejemplo concreto es el caso en que E y F correspondan a los eventos "el primer dado sale 6" y "el primer dado sale 5 o 6" respectivamente (aquí $\mathbb{P}(E) = 1/6$, $\mathbb{P}(F) = 1/3$, y $\mathbb{P}(E\cap F) = 1/6$).

Observar también que si E acarrea información negativa acerca de F entonces E^c acarrea información positiva acerca de E puesto que $\mathbb{P}(E^c \cap F)/\mathbb{P}(F) = (\mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F))/\mathbb{P}(F) = 1 - \mathbb{P}(E \cap F)/\mathbb{P}(F) > 1 - \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E^c)$. Luego, basándonos en uno de los ejemplos del punto anterior podemos deducir que el evento asociado a "el primer dado no sale 6" acarrea información negativa acerca del evento asociado a "el primer dado sale 1."

PROBLEMA 2:

(i.1).- Hay 3! formas de sentar a las tres parejas de forma que cada pareja quede sentada junta (porque hay 3! permutaciones de tres objetos distinguibles). Además, hay 2 formas de ordenar a cada pareja (porque ya sea el esposo o la esposa va primero). Luego, por el principio generalizado del conteo, hay $2^3 \cdot 3! = 48$ ordenamientos posibles tales que las tres parejas quedan sentadas juntas.

(i.2).- Consideremos los tres eventos, que llamaremos A, B, y C, correspondientes a "la pareja A se sienta junta", "la pareja B se sienta junta", y "la pareja C se sienta junta." La probabilidad que se nos pide calcular es $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$. Por principio de inclusión–exclusión sabemos que

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) .$$

Argumentando en la misma forma que en el punto anterior obtenemos que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2 \cdot 5!}{6!} = \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{2^2 \cdot 4!}{6!} = \frac{2}{15},$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{2^3 \cdot 3!}{6!} = \frac{1}{15}.$$

Sigue que $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 3\,\frac{1}{3} - 3\,\frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{3}$.

(ii).- Consideremos el espacio de probabilidad equiprobable $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_{10}) \in \{r, n\} : |\{i : x_i = r\}| = 3\},$$

donde r representa una bola roja y n una bola negra. Para $i \in \{1, \ldots, 10\}$, sea E_i el evento asociado a la afirmación "la primera bola roja se saca la i-ésima vez que se extrae una bola de la urna," i.e.

$$E_i = \{x \in \Omega : x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = n \text{ y } x_i = r\}.$$

Claramente los E_i son disjuntos.

Observar que A puede ganar la i-ésima vez que se extrae una bola sólo si $i \in \{1, \ldots, 10\}$ es impar. Más aún, dado que sólo hay 3 bolas rojas, es imposible que se extraigan 9 bolas sin que se extraiga una bola roja. Sigue que el evento E asociado a la afirmación "A elije la bola roja," es tal que

$$E = E_1 \cup E_3 \cup E_5 \cup E_7 .$$

Como $\mathbb{P}(E) = |E|/|\Omega|$ y como los E_i son disjuntos necesitamos calcular $|\Omega|$, $|E_1|$, $|E_3|$, $|E_5|$, y $|E_7|$ para determinar $\mathbb{P}(E)$.

Cada 10-tupla con 3 coordenadas en r y el resto en n se puede identificar con un subconjunto de 3 índices distintos elegidos en $\{1,\ldots,10\}$ (aquellos índices correspondientes a coordenadas en r). Luego, la cantidad de 10-tuplas con 3 coordenadas en r y el resto en n es igual a la cantidad de subconjuntos de 3 elementos que se pueden hacer con 10 objetos distinguibles, i.e. $|\Omega| = \binom{10}{3}$. Análogamente, si $1 \leq i \leq 7$, cada 10-tupla con 3 coordenadas en r y el resto en n cuyas primeras $i-1$ coordenadas son n y la i-ésima coordenada es r se puede identificar con un subconjunto de 2 índices distintos elegidos en $\{i+1,\ldots,10\}$ (aquellos índices correspondientes a coordenadas en r mayores que i). Luego, la cantidad de 10-tuplas con 3 coordenadas en r y el resto en n cuyas primeras $i-1$ coordenadas son n y la i-ésima coordenada es r es igual a la cantidad de subconjuntos de 2 elementos que se pueden hacer con $10-i$ objetos distinguibles, i.e. $|E_i| = \binom{10-i}{2}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_1) &= \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}, \\
\mathbb{P}(E_3) &= \frac{|E_3|}{|\Omega|} = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{40}, \\
\mathbb{P}(E_5) &= \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{12}, \\
\mathbb{P}(E_7) &= \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{40}.
\end{aligned}$$

Sumando obtenemos que $\mathbb{P}(E) = 7/12$.

PROBLEMA 3:

(i).- Hay $|N|$ formas de elegir la primera nota, $|N|$ formas de elegir la segunda nota, ..., y $|N|$ formas de elegir la k-ésima nota. Luego, por el principio generalizado del conteo, $|\Omega_k| = |N|^k$. Como $|N| = m+1$ sigue que $|\Omega_k| = (m+1)^k$.

(ii).- Observar que cada subconjunto S de N de tamaño k está en correspondencia 1–a–1 con una sucesión creciente de k elementos de N. En efecto, al ordenar los elementos de S de acuerdo a su valor obtenemos una sucesión creciente de k elementos de N y cada una de estas sucesiones da lugar a un único conjunto S. Sigue que para todo k,

$$|E_k| = \binom{|N|}{k} = \binom{m+1}{k}.$$

En particular $|E_4| = (m+1)m(m-1)(m-2)/4!$. Luego,

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(E_4) = \lim_{m\to\infty} \frac{|E_4|}{|\Omega_4|} = \frac{1}{4!} \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{m(m-1)(m-2)}{(m+1)^3} = \frac{1}{4!}.$$

Observación 1 *Otra alternativa para calcular $|E_k|$ es observar que*

$$|E_k| = \sum_{0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_k \leq m} 1.$$

Lo que implica, por ejemplo, que

$$|E_2| = \sum_{\omega_1=0}^{m-1} \sum_{\omega_2=\omega_1+1}^{m} 1 = \sum_{\omega_1=0}^{m-1} (m-\omega_1) = \sum_{\omega_1=1}^{m} \omega_1 = \frac{1}{2} m(m+1).$$

Cálculos similares permiten determinar el valor de $|E_3|$ y $|E_4|$.

(iii).- Claramente, E_4^+ esta asociado a la afirmación "las notas correspondientes a las k evaluaciones es una sucesión creciente cuyo promedio es mayor a $m/2$."

Para probar combinatorialmente que E_4^- y E_4^+ tienen la misma cardinalidad, consideremos la función $f: E_4^- \to E_4^+$ tal que $f((\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)) = (m - \omega_4, m - \omega_3, m - \omega_2, m - \omega_1)$. Veamos primero que f esta bien definida. Para ello, observar que

$$0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 \leq m \iff 0 \leq m - \omega_4 < m - \omega_3 < m - \omega_2 < m - \omega_1 \leq m\,,$$

y que

$$\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{4} \omega_i < \frac{m-1}{2} \iff \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{4}(m - \omega_i) > \frac{m+1}{2}\,.$$

Luego, $f((\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)) \in E_4^+$. Finalmente, observar que f es claramente una biyección. Sigue que $|E_4^+| = |E_4^-|$.

(iv).- Primero observemos que

$$E_4 \;=\; E_4^- \cup E_4^+ \cup (E_4 \setminus (E_4^- \cup E_4^+))\,.$$

Como además E_4^+, E_4^-, y $E_4 \setminus (E_4^- \cup E_4^+)$ son disjuntos sigue que

$$\mathbb{P}(E_4) \;=\; \mathbb{P}\left(E_4^-\right) + \mathbb{P}\left(E_4^+\right) + \mathbb{P}\left(E_4 \setminus (E_4^- \cup E_4^+)\right) \;=\; 2 \cdot \mathbb{P}\left(E_4^-\right) + \mathbb{P}\left(E_4 \setminus (E_4^- \cup E_4^+)\right)\,, \qquad (1)$$

donde la segunda igualdad se debe a que por (iii) sabemos que $\mathbb{P}\left(E_4^-\right) = \mathbb{P}\left(E_4^+\right)$. Por indicación, tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(E_4 \setminus (E_4^- \cup E_4^+)\right) \;=\; \lim_{m\to\infty} \frac{|E_4 \setminus (E_4^- \cup E_4^+)|}{|\Omega_4|} \;\leq\; \lim_{m\to\infty} \frac{5m^3/6}{(m+1)^4} \;=\; 0\,.$$

La conclusión deseada se obtiene tomando el límite cuando $m \to \infty$ en (1) y del resultado obtenido en (ii).

(v).- Al suponer que todas las sucesiones de notas en Ω_k son equiprobables el profesor está implícitamente asumiendo que el promedio de notas de un curso tenderá a estar en torno de $m/2$. En general los promedios de notas de un curso son mayores que $m/2$ lo que hace menos factible observar promedios menores a $(m-1)/2$ y por ello el límite calculado en (i) es una sobre-estimación.

(vi).- Claramente no todas las sucesiones en Ω_k son igualmente probables. Un estudiante que comience muy mal el semestre hará un mayor esfuerzo en las restantes evaluaciones por lo que sus notas probablemente terminarán siendo crecientes pero debido a su mal comienzo su promedio final será bajo. Luego, la probabilidad de ocurrencia de sucesiones crecientes con promedio menores a $(m-1)/2$ debe ser mayor que la calculada, por lo que el límite calculado en (iv) también sería mayor de lo obtenido.