MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **29 de Marzo**

Resumen No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: M. Saez*

1 Análisis Combinatorial

Lema 1 [Principio Generalizado del Conteo] *Dados r experimentos $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_r$ tales que para cada n_{i-1} posibles resultados de $\mathcal{E}_{i-1}$ hay n_i posibles resultados de $\mathcal{E}_i$, se tiene que hay $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$ posibles distintos resultados que se pueden obtener de la realización conjunta de los r experimentos.*

Proposición 1 *Hay $n!$ distintas permutaciones (ordenamientos) de n objetos distinguibles.*

Proposición 2 *Sea $n \geq k$. Con n objetos distinguibles se pueden formar $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ distintos ordenamientos de largo k.*

Proposición 3 *Sea $n \geq k$. Con n objetos distinguibles se pueden formar $\binom{n}{k}$ subconjuntos distintos de cardinalidad k.*

Definición 1 *Sean $n, n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ tales que $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$. Se define el coeficiente multinomial $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$.*

Lema 2 *Sea $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$. Hay $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ formas de distribuir n bolas distinguibles en r urnas distinguibles de forma que en la i-ésima urna queden n_i bolas.*

Lema 3 *Sea $r > 0$. Hay $\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r-1}{n}$ formas de distribuir n bolas indistinguibles en r urnas distinguibles.*

Lema 4 *Sea $n \geq r > 0$. Hay $\binom{n-1}{r-1}$ formas de distribuir n bolas indistinguibles en r urnas distinguibles de forma que ninguna urna quede vacía.*

2 Teoría Axiomática de Probabilidades

Definición 2 [Medida de Probabilidad] *Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una familia de eventos de interés (técnicamente una σ-álgebra). Decimos que $\mathbb{P}(\cdot)$ es una medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ si $\mathbb{P}$:$\mathcal{F} \to [0,1]$ es tal que*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

2. [**σ-aditividad**] *si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de eventos disjuntos, i.e. tales que $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, se tiene que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$.*

A la tripleta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se le denomina espacio de probabilidad.

Observación 1 *Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad, entonces $\mathbb{P}(\cdot)$ sólo está definida sobre $\mathcal{F}$. En rigor, deberíamos tener cuidado de evaluar $\mathbb{P}(\cdot)$ sólo en aquellos conjuntos E pertenecientes a $\mathcal{F}$. En este curso no nos preocuparemos de esto, asumiremos que todo funciona bien, o en otras palabras que cada vez que estemos evaluando $\mathbb{P}(\cdot)$ en algún conjunto E dicho conjunto pertenece a $\mathcal{F}$.*

Proposición 4 *Se tiene que;*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
2. *para todo evento E se tiene que $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$,*
3. *si E y F son eventos tales que $E \subseteq F$, entonces $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$.*
4. [**Aditividad finita**] *si I es un conjunto finito de índices y $\{E_i\}_{i\in I}$ una colección de eventos disjuntos, i.e. $E_i \cap E_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, entonces $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(E_i)$.*

Lema 5 [**Principio de Inclusión–exclusión**] *Si $\{E_i\}_{i=1}^n$ es una colección de eventos entonces*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) - \sum_{i_1<i_2} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \cdots \\ &\quad + (-1)^{r+1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_r}) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(E_1 \cap \cdots \cap E_n)\,,\end{aligned}$$

donde $\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_r})$ se toma sobre todos los $\binom{n}{r}$ posibles subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$ de tamaño r.

Definición 3 [**Espacios Equiprobables**] *Se dice $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad equiprobable si existe algún $0 < p \leq 1$ tal que para todo $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p$.*

Lema 6 *Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad equiprobable entonces Ω es finito y $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/|\Omega|$ cualquiera sea $\omega \in \Omega$. Más aún, $\mathbb{P}(E) = |E|/|\Omega|$ cualquiera sea $E \subseteq \Omega$.*

Definición 4 [**Sucesiones crecientes/decrecientes de conjuntos**] *Se dice que $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente (respectivamente decreciente) de eventos si $E_n \subseteq E_{n+1}$ (respectivamente $E_n \supseteq E_{n+1}$). En el caso de sucesiones crecientes definimos $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{i=0}^{n} E_n$ y en el caso de sucesiones decrecientes $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{i=0}^{n} E_n$.*

Lema 7 [**Continuidad de la medida de probabilidad**] *Para toda sucesión creciente o decreciente de eventos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right)\,.$$

Lema 8 [**Desigualdad de Boole**] *Si $\{E_i\}_{i\in I}$ es una colección numerable de eventos, entonces*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \leq \sum_{i\in I} \mathbb{P}(E_i)\,.$$