MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **2 de Julio, 1999**

Resumen No. 4

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: M. Saez*

1 Esperanza Matemática

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sean X, $X_1, \ldots, X_n$, e Y variables aleatorias sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definición 1 [**Esperanza**] *Se define la esperanza o media de X, denotada $\mathbb{E}(X)$, por*

$$\mathbb{E}(X) = -\int_{-\infty}^{0} F_X(t)dt + \int_{0}^{\infty} (1 - F_X(t))dt\,,$$

siempre y cuando alguna de las integrales sea finita.

Proposición 1 *Si $\mathbb{P}(\{X \geq 0\}) = 1$, entonces $\mathbb{E}(X) \geq 0$.*

Proposición 2 *Si $\mathbb{E}(X)$ es finita,*

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{a \in S_X} a p_X(a)\,, & \textit{si } X \textit{ es discreta}\,, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)dt\,, & \textit{si } X \textit{ es absolutamente continua}\,. \end{cases}$$

Proposición 3 [**Esperanza de una Función de una Variable Aleatoria**] *Si $g{:}D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $\mathbb{P}(\{X \in D\}) = 1$ y $g(X)$ es variable aleatoria,*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{a \in S_X} g(a) p_X(a)\,, & \textit{si } X \textit{ es discreta}\,, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t)dt\,, & \textit{si } X \textit{ es absolutamente continua}\,. \end{cases}$$

Lema 1 *Si $A \in \mathcal{F}$, y $\mathbb{I}_A$ denota la variable aleatoria $\mathbb{I}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ y $\mathbb{I}_A(\omega) = 0$ si $\omega \in \Omega \setminus A$, entonces $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = \mathbb{P}(A)$.*

Definición 2 [**Varianza y Desviación**] *Se define la varianza de X, denotada $\mathbb{V}ar(X)$, por*

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

La desviación de X, denotada $\sigma(X)$, se define por $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)}$.

Proposición 4 [**Esperanza de una Función de un Vector Aleatorio**] *Si $\vec{X}$ denota el vector aleatorio $(X_1,\ldots,X_n)$, $g{:}D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es tal que $\mathbb{P}\left(\left\{\vec{X}\in D\right\}\right)=1$ y $g(\vec{X})$ es variable aleatoria,*

$$\mathbb{E}\left(g(\vec{X})\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\vec{a}\in S_{\vec{X}}} g(\vec{a})p_{\vec{X}}(\vec{a})\,, & \text{si } X_1,\ldots,X_n \text{ son conjuntamente discretas}\,, \\ \displaystyle\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n} g(\vec{x})f_{\vec{X}}(\vec{x})dx_1\cdots dx_n\,, & \text{si } X_1,\ldots,X_n \text{ son conjuntamente continuas}\,. \end{cases}$$

Definición 3 [**Covarianza**] *Se define la covarianza de X e Y, denotada $\mathbb{C}ov\,(X,Y)$, por*

$$\mathbb{C}ov\,(X,Y) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}\,(X))\,(Y-\mathbb{E}\,(Y))\right)\,.$$

Proposición 5 *La covarianza es una forma bilineal, i.e., si X, X', Y, e Y' son variables aleatorias,*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov\,(X\pm X',Y) &= \mathbb{C}ov\,(X,Y)\pm\mathbb{C}ov\,(X',Y)\,, \\ \mathbb{C}ov\,(X,Y\pm Y') &= \mathbb{C}ov\,(X,Y)\pm\mathbb{C}ov\,(X,Y')\,. \end{aligned}$$

Proposición 6 *Si $a,a',b,b'\in\mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar\,(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right)-\mathbb{E}^2\,(X)\,, & \mathbb{V}ar\,(X) &= \mathbb{C}ov\,(X,X)\,, \\ \mathbb{C}ov\,(X,Y) &= \mathbb{E}\,(X\,Y)-\mathbb{E}\,(X)\,\mathbb{E}\,(Y)\,, & \mathbb{C}ov\,(X,Y) &= \mathbb{C}ov\,(Y,X)\,, \\ \mathbb{E}\,(a\,X+b) &= a\,\mathbb{E}\,(X)+b\,, & \mathbb{V}ar\,(a\,X+b) &= a^2\,\mathbb{V}ar\,(X)\,. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov\,(aX+b,a'Y+b') &= aa'\,\mathbb{C}ov\,(X,Y)\,, \\ \mathbb{V}ar\,(X\pm Y) &= \mathbb{V}ar\,(X)+\mathbb{V}ar\,(Y)\pm 2\,\mathbb{C}ov\,(X,Y)\,. \end{aligned}$$

Lema 2 *Sean $g{:}D_X\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $h{:}D_Y\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones tales que $\mathbb{P}\left(\{X\in D_X\}\right)=\mathbb{P}\left(\{Y\in D_Y\}\right)=1$ y $g(X)$ y $h(Y)$ son variables aleatorias. Si X e Y son independientes,*

$$\mathbb{E}\,(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}\,(g(X))\,\mathbb{E}\,(h(Y))\,.$$

En particular, si X e Y son independientes, $\mathbb{E}\,(XY)=\mathbb{E}\,(X)\,\mathbb{E}\,(Y)$.

Corolario 1 *Si X e Y son independientes, $\mathbb{V}ar\,(X+Y)=\mathbb{V}ar\,(X)+\mathbb{V}ar\,(Y)$ y $\mathbb{C}ov\,(X,Y)=0$.*

Definición 4 [**Correlación**] *Si $\sigma(X),\sigma(Y)>0$, se define la correlación entre X e Y, denotada $\rho\,(X,Y)$, por*

$$\rho\,(X,Y) = \frac{\mathbb{C}ov\,(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\,.$$

Proposición 7 *Se tiene que $\rho\,(X,Y)=\rho\,(Y,X)$, $-1\le\rho\,(X,Y)\le 1$, y además,*

- *si $\rho\,(X,Y)=\pm 1$, entonces $\mathbb{P}\left(\{Y=a+bX\}\right)=1$ para algún $a\in\mathbb{R}$ y $b=\pm\sigma(Y)/\sigma(X)$.*

- *si* $\mathbb{P}(\{Y = a+bX\}) = 1$, *entonces* $|\rho(X,Y)| = 1$.

Proposición 8 *Si* $X_1, \ldots, X_n$ *e* $Y_1, \ldots, Y_m$ *son variables aleatorias,*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i), \qquad \mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar(X_i) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{C}ov(X_i, X_j).$$

y

$$\mathbb{C}ov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathbb{C}ov(X_i, Y_j).$$

Lema 3 *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias. Si para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{X_n \ge 0\}) = 1$, *o* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < +\infty$, *entonces* $\mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n)$.

Lema 4 *Si* $X_1, \ldots, X_n$ *son independientes*

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i), \qquad y \qquad \mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar(X_i).$$

Definición 5 [**Momentos**] *Si* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $\mathbb{E}(X^n)$ *se denomina el* n*-ésimo momento de* X *o el momento de orden* n *de* X.

Definición 6 [**Función Generadora de Momentos**] *Se define la función generadora de momentos* $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *por* $\phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$.

Lema 5 *Si la función generadora de momentos de* X, $\phi_X(\cdot)$, *es* n *veces diferenciable en un intervalo abierto en torno al* 0, *entonces*

$$\mathbb{E}(X^n) = \left.\frac{d^n \phi_X}{dt^n}\right|_{t=0}.$$

Proposición 9 *Si* $a, b \in \mathbb{R}$, $\phi_{aX+b}(t) = e^{tb}\phi_X(at)$.

Proposición 10 *Si* X *e* Y *son independientes, entonces* $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Lema 6 $X_1, \ldots, X_n$ *son independientes sí y sólo si* $\mathbb{E}\left(e^{\sum_{i=1}^{n} t_i X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(t_i)$ *para todo* $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$.

Teorema 1 *Si la función generadora de momentos de* X, $\phi_X(\cdot)$, *es finita en un intervalo abierto en torno a* $t = 0$ *entonces la función distribución de* X, $F_X(\cdot)$, *está completamente determinada por* $\phi_X(\cdot)$.

2 Teoremas Limites

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sean X y $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ variables aleatorias sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

Proposición 11 [**Desigualdad de Markov**] *Si X es una variable aleatoria no–negativa, i.e., $\mathbb{P}(\{X \geq 0\}) = 1$, entonces para todo $t > 0$,*

$$\mathbb{P}(\{X \geq t\}) \quad \leq \quad \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

Proposición 12 [**Desigualdad de Chebyshev**] *Si X es una variable aleatoria de esperanza y varianza finita, entonces para todo $\epsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon\}) \quad \leq \quad \frac{1}{\epsilon^2} \mathbb{V}ar(X).$$

Más aun, para todo $p > 0$,

$$\mathbb{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon\}) \quad \leq \quad \frac{1}{\epsilon^p} \mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^p).$$

Proposición 13 *$\mathbb{V}ar(X) = 0$ sí y sólo si $\mathbb{P}(\{X = \mathbb{E}(X)\}) = 1$.*

Proposición 14 [**Desigualdad de Jensen**] *Si $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función convexa, dos veces diferenciable, y $\mathbb{P}(\{X \in D\}) = 1$, entonces*

$$\mathbb{E}(f(X)) \quad \geq \quad f(\mathbb{E}(X)),$$

si las esperanzas existen y son finitas.

Teorema 2 [**Desigualdad de Kolmogorov**] *Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes tales que $\mathbb{E}(X_i) = 0$ y $\mathbb{V}ar(X_i) = \sigma_i^2 < \infty$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Entonces, para todo $a > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\max_{i=1,\ldots,n} |X_1 + \ldots + X_i| > a\right\}\right) \quad \leq \quad \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2.$$

Lema 7 [**Ley de los Grandes Números — Versión Débil**] *Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, todas con varianza finita μ, y sea $\epsilon > 0$. Entonces,*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| > \epsilon\right\}\right) \quad \longrightarrow \quad 0, \qquad si\ n \to \infty.$$

Lema 8 [**Ley de los Grandes Números — Versión Fuerte**] *Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes tales que $\mathbb{E}(X_i) = 0$, y $\sigma^2 = \mathbb{V}ar(X_i)$. Si $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 / i^2 < \infty$, entonces*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0\right\}\right) \quad = \quad 1.$$

Convención 1 *La función distribución de una* Normal$(0,1)$ *la denotaremos* $\Phi(\cdot)$, *i.e.,*

$$\Phi(t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx \,.$$

Teorema 3 [**Teorema Central del Limite**] *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas todas con media* μ *y varianza* σ^2. *Entonces, la distribución de*

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \,,$$

converge a la distribución de una Normal$(0,1)$, *i.e.,*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le t\right\}\right) \;\longrightarrow\; \Phi(t)\,, \qquad si\; n \to \infty\,.$$

Teorema 4 [**Teorema Central del Limite para Variables Aleatorias Independientes**] *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes con medias y varianzas* $\mu_i = \mathbb{E}\,(X_i)$, $\sigma_i^2 = \mathbb{V}ar\,(X_i)$. *Si (i) los* X_i *están uniformemente acotadas, i.e., si para algún* M, $\mathbb{P}\,(\{|X_i| < M\}) = 1$ *para todo* i, *y (ii)* $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$, *entonces*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}} \le t\right\}\right) \quad\longrightarrow\quad \Phi(t)\,, \qquad si\; n \to \infty\,.$$