Ma47a Optimización Combinatorial **6 de Mayo, 2006**

Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: G. Sanchez*

TIEMPO: 4.5 HRS.

PROBLEMA 1: (40 %)

(i).- (3.0 pts) Sea $G = (V, E)$ un digrafo, s y t nodos de G, y $u : E \to \mathbb{R}_+$ función de capacidad en los arcos de G. Sea además $c : V \to \mathbb{R}_+$ una función de capacidad en los nodos. Muestre como resolver eficientemente el problema de encontrar un (s,t)–flujo máximo $\vec{x} = (x_e)_{e \in E}$ tal que para todo $w \in V \setminus \{s, t\}$,

$$\sum_{v:vw \in E} x_{vw} \leq c(w)\,.$$

Indicación: Represente cada nodo de la red G como un par de nodos.

(ii).- (3.0 pts) Sea $G = (V, E)$ un digrafo. Decimos que dos caminos en G son *internamente nodo-disjuntos* si sus nodos iniciales y finales son los únicos que tienen en común. Para $s, t \in V$ tal que $st \notin E$, un conjunto $S \subseteq V \setminus \{s, t\}$ *separa* s de t si no existe un (s,t)–dicamino en $G \setminus S$.

Demuestre el siguente resultado:

Teorema 1 ***[de Menger]*** *El número máximo de (s,t)-dicaminos internamente nodo-disjuntos es igual al cardinal mínimo de un conjunto $S \subseteq V \setminus \{s, t\}$ que separa s de t.*

Indicación: Use el Teorema de Flujo-máximo/Corte-mínimo.

PROBLEMA 2: (40 %)

(i).- (3.0 pts) Sea $G = (L \cup R, E)$ un grafo bipartito, $|L| = |R|$ y $L \cap R = \emptyset$. Para $S \subseteq V(G)$ se define el conjunto de vecinos de S como $N(S) = \{v \in V(G) : uv \in E, u \in S\}$. Demuestre el siguiente:

Teorema 2 ***[de Hall]*** *El grafo G posee un matching perfecto si y sólo si para todo $S \subseteq L$ se tiene que $|N(S)| \geq |S|$.*

Indicación: Use el Teorema de Flujo-máximo/Corte-mínimo.

(ii).- (3.0 pts) Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos particiones de un conjunto finito Ω. Pruebe que existe un subconjunto M de Ω intersectando cada conjunto en $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ en exactamente un elemento si y sólo si para todo $k \in \mathbb{N}$, la unión de cualquier colección de k clases de $\mathcal{A}$ intersecta al menos k clases de B.

Problema 3: (20 %)

Un *dicircuito Euleriano* de un digrafo G es un dicircuito que recorre cada arco de G exactamente una vez. Se sabe (no lo demuestre) que G posee un dicircuito Euleriano si y sólo si $|\delta(v)| = |\delta(\overline{v})|$.

Sea G un digrafo fuertemente conexo para el que $|\delta(v)| + |\delta(\overline{v})|$ es par para todo nodo v de G. Sea además $\omega : E \to \mathbb{R}$ una función tal que $\omega(uv)$ representa el costo de "revertir uv," i.e., reemplazar uv por vu. Muestre como elegir eficientemente un subconjunto F de arcos de G a revertir de forma que $\omega(F)$ sea mínimo y el digrafo resultante tenga un dicircuito Euleriano.