Ma47a Optimización Combinatorial	**6 de Mayo, 2006**

Pauta Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: G. Sanchez*

Problema 1:

(i).- La idea es reemplazar cada nodo v de G, $v \notin \{s,t\}$, por un par de nodos v' y v'', conectados por un arco de v' a v'' con capacidad $c(v)$. (Por convención, $s' = s'' = s$ y $t' = t'' = t$.)

Todos los arcos incidentes en v en la red original G se hacen llegar a v' y los arcos de la red original que salen de v se hacen partir de v'' (las capacidades de los arcos así generados son las mismas que las de los arcos de la red original). Sea G' la red que se obtiene del procedimiento recién descrito.

El valor óptimo de un (s,t)-flujo en G donde para todo $w \in V \setminus \{s,t\}$ se tiene que $\sum_{v:vw\in E} x_{vw} \leq c(w)$ es igual al valor óptimo de un (s,t)-flujo en G'. En efecto, si $\vec{x} = (x_e)_{e\in E}$ es un flujo factible en G, entonces $\vec{x'} = (x'_{e'})_{e'\in E'}$ tal que $x'_{w'w''} = \sum_{v:vw\in E} x_{vw}$ y $x'_{v''w'} = x_{vw}$ si $vw \in E$, es un flujo factible en G' cuyo valor es idéntico al de $\vec{x}$. Para ver que el converso también se tiene, consideremos un (s,t)-flujo factible $\vec{x'} = (x'_{e'})_{e'\in E'}$ en G'. Sea $\vec{x} = (x_e)_{e\in E}$ tal que $x_{vw} = x'_{v''w'}$ para todo $vw \in E$. Es fácil ver que $\vec{x}$ es un (s,t)-flujo en G y que además: (1) $x_{vw} = x'_{v''w'} \leq c(vw)$, y (2) $\sum_{v:vw\in E} x_{vw} = x'_{w'w''} \leq c(w)$.

Sigue que resolver el problema planteado puede hacerse resolviendo un problema de flujo máximo en una red con $|V| - 2$ nodos y $|V| - 2$ aristas más. Luego, puede hacerse eficientemente.

(ii).- Claramente, el tamaño de un conjunto $S \subseteq V \setminus \{s,t\}$ que separa s de t es una cota superior para el número de (s,t)-dicaminos internamente nodo-disjuntos.

Para probar el converso, nuevamente construiremos a partir de G un digrafo $G' = (V', E')$ donde cada uno de los nodos v de $G \setminus \{s,t\}$ ha sido reemplazado por un par de nodos v' y v'' como en la parte anterior (modificándose y agregándose los arcos respectivos). A cada uno de los arcos $v'v''$ de G' le asignamos una capacidad igual a 1 y el resto de los arcos se asumirán de capacidad $+\infty$.

Sea $\delta(C)$ un (s,t)-corte en G' de capacidad finita. Necesariamente, $\delta(C)$ sólo contiene arcos del tipo $v'v''$ donde $v \in V$. Además, el cardinal de $\delta(C)$ es igual a su capacidad. Por otro lado, el conjunto de nodos v tales que $v'v''$ pertenece al corte es un subconjunto de $V \setminus \{s,t\}$ que separa s de t. Luego, del Teorema del Flujo-máximo/Corte-mínimo se tiene que el valor de un (s,t)-flujo máximo en G' es una cota inferior en el número de nodos de un (s,t)-corte en G. Para concluir el resultado deseado, basta ver que si $P_1, \ldots, P_k$ son dicaminos en G internamente nodo-disjuntos de s a t, entonces hay un (s,t)-flujo en G' de valor k. En efecto, sea $P = e_0 e_1 \ldots e_\ell$ un (s,t)-dicamino en G donde $e_i = v_i v_{i+1}$, y sea P' el (s,t)-dicamino en G' tal que

$$P' = s, v'_1 v''_1, v'_2 v''_2, \ldots v'_{\ell-1} v''_{\ell-1}, t\,.$$

Luego, si $\vec{x'} = (x'_{e'})_{e'\in E'}$ es el (s,t)-flujo en G' tal que $x'_{e'} = 1$ si $e' \in P'_i$ para algún i, se tiene que $\vec{x'}$ es un (s,t)-flujo factible en G' de valor k.

Problema 2:

(i).- **(Sketch)** Claramente, si G posee un matching perfecto, entonces $|N(S)| \geq |S|$ cualquiera sea $S \subseteq L$.

Para probar el converso, construiremos una red G' asociada a G. Los nodos de G' serán los de G más dos nodos adicionales que denotaremos por s y t. Los arcos de G' serán los de G pero orientados desde los nodos en L hacia los nodos en R. Además, agregamos en G' arcos de s a v para todo $v \in L$ y de v a t para todo $v \in R$. Finalmente, definimos sobre los arcos de G' la función de capacidad superior, denotada $u(\cdot)$, que es idénticamente igual a 1. Notar que por integralidad de la función de capacidad se tiene que existe un (s,t)-flujo integral de valor máximo. Es fácil ver que dicho flujo tiene valor $n = |L| = |R|$ si y sólo si G posee un matching perfecto.

Afirmamos que si $|N(S)| \geq |S|$ cualquiera que sea $S \subseteq L$, entonces el (s,t)-flujo máximo en G' tiene valor $n = |L| = |R|$. Una vez establecida la validez de ésta afirmación, de la discusión del párrafo anterior, se deriva el Teorema de Hall.

Dado que existe un corte en G' de capacidad n (e.g., $\delta(s)$), para probar la afirmación basta mostrar que si $|N(S)| \geq |S|$ cualquiera sea $S \subseteq L$, entonces $u(\delta(C)) \geq n$ cualquiera sea el (s,t)-corte $\delta(C)$ en G', y aplicar el Teorema de Flujo-máximo/Corte-mínimo. En efecto, notar que

$$u(\delta(C)) = |\delta(C)| \geq |L \cap \overline{C}| + |R \cap C| + |N(L \cap C)| \geq |L \cap \overline{C}| + |R \cap C| + |L \cap C| \geq |L| = n\,.$$

(ii).- **(Sketch)** Obtendremos el resultado enunciado como un corolario del Teorema de Hall. Para ello, construimos el grafo bipartito $G = (L \cup R, E)$ tal que

- Cada elemento A de $\mathcal{A}$ está asociado a un nodo $\ell_A \in L$.
- Cada elemento B de $\mathcal{B}$ está asociado a un nodo $r_B \in R$.
- Si $A \cap B$ es no vacío, entonces hay un arco $\ell_A r_B$ en E.

Se verifica que para todo $k \in \mathbb{N}$ la unión de k clases de $\mathcal{A}$ intersecta al menos k clases de $\mathcal{B}$ si y sólo si para todo $S \subseteq L$ se tiene que $|N(S)| \geq |S|$.

Por el Teorema de Hall, sigue que existe P matching perfecto en G si y sólo si para todo $k \in \mathbb{N}$ la unión de k clases de $\mathcal{A}$ intersecta al menos k clases de $\mathcal{B}$.

Sea $P = \{\ell_{A_i} r_{B_i} : i = 1, \ldots, n\}$, $n = |\mathcal{A}|$, un mathcing perfecto en G. Como cada elemento de P es un arco de G, por construcción de G se tiene que $C_i \stackrel{\text{def}}{=} A_i \cap B_i \neq \emptyset$, cualquiera sea el i. Sea m_i un elemento cualquiera de C_i. Como A_i y $A_{i'}$ son disjuntos si $i \neq i'$, sigue que $C_i \cap C_{i'} = \emptyset$. En particular $m_i \neq m_{i'}$ si $i \neq i'$. Afirmamos que $M = \{m_i : i = 1, \ldots, n\}$ es un subconjunto de Ω que intersecta a cada conjunto en $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ en exactamente un elemento. En efecto, si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A = A_i$ para algún i. Luego, $m_i \in C_i \subseteq A_i$, i.e., $M \cap A \neq \emptyset$. Además, si $m, m' \in M \cap A$ para $m \neq m'$, entonces existirían $i \neq i'$ tales que $m_i = m$ y $m_{i'} = m'$. Esto implicaría que $A \cap A_i \neq \emptyset$ y que $A \cap A_{i'} \neq \emptyset$. Pero como $\mathcal{A}$ es partición, entonces necesariamente $A = A_i = A_{i'}$ para $i \neq i'$, contradiciendo el hecho que $\mathcal{A}$ es partición. Análogamente se tiene que $|B \cap M| = 1$ cualquiera sea $B \in \mathcal{B}$. Resumiendo, M intersecta cada clase de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ exactamente una vez.

Por otro lado, sea M un conjunto que intersecta cada clase de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ exactamente una vez. Como $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son particiones de Ω, necesariamente se debe tener que $|M| = |\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$. Sea entonces

$M = \{m_1, \ldots, m_n\}$. Sean A_i y B_i en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente, tales que $m_i \in A_i$ y $m_i \in B_i$. Es fácil ver que $P = \{\ell_{A_i} r_{B_i} : i = 1, \ldots, n\}$ es un matching perfecto en G.

Problema 3: Reduciremos el problema planteado al de un problema de circulación de costo mínimo. La idea es construir una red $G' = (V', E')$ asociada al grafo $G = (V, E)$. Cada arco de G estará representado en G' por un nodo. Cada nodo de G también estará representado por un nodo en G'. Específicamente,

$$V = \{v_e : e \in E\} \cup \{v : v \in V\} .$$

El conjunto de arcos de E' de G' se construye de la siguiente manera:

- Por cada arco e de G hay un arco sv_e en G', con capacidad superior e inferior igual a 1.
- Por cada arco $e = uv$ de G hay arcos $v_e u$ y $v_e v$ en G', ambos con capacidad superior unitaria y capacidad inferior nula.
- Por cada nodo v de G hay un arco vt en G' con capacidad superior e inferior $(|\delta(v)| + |\delta(\overline{v}|)/2$.
- Hay un arco ts en G' con capacidad superior $+\infty$ y capacidad inferior 0.

En lo que se refiere a la función de costos $c(\cdot)$ definida sobre los arcos de G', la hacemos identicamente nula salvo:

- En los arcos $v_e u$ tales que $e = uv \in E$, donde toma el valor $-\omega(uv)$.
- En los arcos $v_e v$ tales que $e = uv \in E$ donde toma el valor $\omega(uv)$.

Observar que los arcos de G' están dirigidos de $\{s\}$ a $\{v_e : e \in E\}$, de $\{v_e : e \in E\}$ a $\{v : v \in V\}$, de $\{v : v \in V\}$ a $\{t\}$, y de t a s. En particular, todo dicircuito de G' contienen el arco ts. Finalmente, dado que $|\delta(v)| + |\delta(\overline{v})|$ es par cualquiera sea $v \in V$, se tiene que las funciones de capacidad superior e inferior en los arcos es integral.

Veremos que el costo de una circulación óptima en G' es $2\omega(F) - \omega(E)$ para algún conjunto F de arcos de G de costo mínimo que de ser revertidos hacen que G posea un dicircuito Euleriano.

Por integralidad de la función de capacidad superior y de la aplicación del método del circuito aumentador sabemos que existe una circulación de costo mínimo integral, digamos $\vec{x'} = (x'_{e'})_{e' \in E'}$. Como el flujo que entra a v_e en G' es igual a 1, se tiene que $x'_{v_e v} + x'_{v_e u} = 1$ cualquiera que sea $e = uv \in E$. En particular $x'_{v_e u} = 1$ y $x'_{v_e v} = 0$, o $x'_{v_e u} = 0$ y $x'_{v_e v} = 1$, i.e., cada arco en G se usa hacia adelante o hacia atras (pero no en ambas direcciones). Sea F el conjunto de arcos $uv \in E$ tales que $x'_{v_e v} = 1$ y sea $\widetilde{G}$ el grafo que se obtiene al revertir los arcos de G que están en F. No es difícil ver que $C(\vec{x'}) = 2\omega(F) - \omega(E)$. Por conservación de flujo en $v \in V$, tenemos que en $\widetilde{G}$ todo nodo tiene igual cantidad de arcos que le llegan y que salen de el. Por lo indicado en el enunciado, sigue que $\widetilde{G}$ posee un dicircuito Euleriano.

Consideremos ahora un conjunto F de arcos a revertir en G de manera que el grafo $\widetilde{G}$ resultante tenga un dicircuito Euleriano $\mathcal{C}$. Necesariamente, los arcos en F son recorridos por $\mathcal{C}$ en sentido inverso y todos los arcos en $E \setminus F$ son recorridos hacia adelante. Definamos $\vec{x'} = (x'_{e'})_{e' \in E'}$ tal que $x'_{v_e u} = 1$ y $x'_{v_e v} = 0$ si $uv \in E \setminus F$, y $x'_{v_e u} = 0$ y $x'_{v_e v} = 1$ si $uv \in F$, $x'_{sv_e} = 1$ para todo $e \in E$,

$x'_{vt} = (|\delta(v)| + |\delta(\overline{v})|)/2$ para todo $v \in V$, y $x'_{ts} = |E|$. No es difícil ver que del hecho que $\mathcal{C}$ es un dicircuito Euleriano en $\widetilde{G}$ se puede concluir que $\vec{x'}$ es una circulación factible en G'. De hecho, $\vec{x'}$ es una circulación de costo $C(\vec{x'}) = 2\omega(F) - \omega(E)$.

Luego, para determinar el conjunto F de arcos requerido basta con resolver un problema de circulación de costo mínimo, lo que se puede hacer eficientemente partiendo de una circulación factible. El único detalle pendiente es entonces especificar como encontrar una circulación factible en G'. Una posibilidad es encontrar una orientación Euleriana de la versión no dirigida de G (esto se puede hacer eficientemente de acuerdo a lo visto en el Control 1). Se verifica que una circulación factible en G' es $\vec{x'} = (x'_{e'})_{e' \in E'}$ tal que $x'_{sv_e} = 1$ para todo $e \in E$, $x'_{v_e u} = 1$ y $x'_{v_e v} = 0$ si el arco $e = uv \in E$ no se revierte en la orientación Euleriana y $x'_{v_e u} = 0$ y $x'_{v_e v} = 1$ en caso contrario, $x'_{vt} = (|\delta(v)| + |\delta(\overline{v})|)/2$ para todo $v \in V$, y $x'_{ts} = |E|$.