Ma50b Complejidad Computacional	**14 de Mayo de 2005**

Control 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: J. Soto*

TIEMPO: 4.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- Una máquina de Turing M con oráculo A, denotado M^A, es una máquina de Turing con una cinta adicional, llamada cinta de oráculo. Cuando M escribe una palabra σ en su cinta de oráculo y entra en un estado especial (de pregunta), es informada en un paso si σ pertenece o no a A.

> (i.1).- (1.5 pts) Vía un argumento de cardinalidad pruebe que existen lenguajes que no son reconocibles por máquinas de Turing con oráculo A_{mT}.
>
> (i.2).- (1.5 pts) Sea $Z = \left\{\langle M, \omega\rangle : M^{A_{mT}}(\omega) = acepta\right\}$. Vía un argumento de diagonalización pruebe que no existe una máquina de Turing con oráculo A_{mT} que decida Z.
>
> Indicación: Pruebe que $\overline{Z}$ no es decidible por una máquina de Turing con oráculo A_{mT}.

(ii).- (3.0 pts) Pruebe que P es cerrado bajo la operación estrella de Kleen, i.e., si $L \in \mathrm{P}$, entonces $L^* \in \mathrm{P}$.

Indicación: En la entrada $\omega = \omega_1 \ldots \omega_n$ construya una tabla de $n \times n$ donde la coordenada (i, j), $i \leq j$, indique si se tiene o no que $\omega_i \ldots \omega_j \in L^*$ para un $L \in \mathrm{P}$ fijo.

PROBLEMA 2:

(i).- (3.0 pts) Una mT probabilista M es una mT multicintas una de las cuales se denomina *cinta aleatoria*. La cinta aleatoria es sólo de lectura y la cabeza lectora de dicha cinta no puede desplazarse a la izquierda. Cuando una mT probabilista comienza a ejecutar, la cinta aleatoria contiene en cada una de sus celdas un 0 o un 1 con probabilidad $1/2$. El contenido de cada celda es independiente del contenido de las otras celdas.

Sea $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $T(n) \geq n$. Se define la clase RTIEMPO$(T(n))$ como el conjunto de lenguajes L para los que existe una máquina probabilista M a tiempo $O(T(n))$ tal que

$$\begin{aligned} \omega \in L &\implies \mathbb{P}_\rho(M \text{ acepta } \omega) \geq 1/2\,, \\ \omega \notin L &\implies \mathbb{P}_\rho(M \text{ rechaza } \omega) = 1\,. \end{aligned}$$

donde la probabilidad esta tomada sobre el contenido inicial ρ de la cinta aleatoria elegidos uniformemente en $\{0,1\}^{T(|\omega|)}$. Pruebe que RTIEMPO$(T(n)) \subseteq$ NDTIEMPO$(T(n))$.

(ii).- (3.0 pts) Se define $MAX-SAT$ como el conjunto de palabras de la forma $\langle\varphi, k\rangle$ tales que $k \in \mathbb{N}$ y φ es una fórmula Booleana en forma conjuntiva normal cuyo número máximo de cláusulas que se pueden satisfacer simultáneamente es exactamente igual a k. Pruebe que $MAX-SAT \in \mathrm{NP}$ si y sólo si $\mathrm{NP} = co\mathrm{NP}$.

PROBLEMA 3:

(i).- (3.0 pts) Dado un grafo (no–dirigido) $G = (V,E)$, definimos el corte definido por S, denotado $\delta(S)$, como el conjunto de arcos con un único extremo en S, i.e.,

$$\delta(S) = \{uv \in E \, : \, |\{u,v\} \cap S| = 1\} \, .$$

Pruebe que el siguiente lenguaje es NP–completo:

$$MAX-CUT = \{\langle G,k \rangle \, : \, G \text{ es un grafo y existe } S \subseteq V(G) \text{ tal que } |\delta(S)| \geq k\} \, .$$

Indicación: Pruebe que $NAESAT \leq_P MAX-CUT$. Use como *gadget* para la variable x una colección de $6m$ nodos, la mitad de los cuales tienen como etiqueta a x y la otra mitad $\bar{x}$ (aquí, m denota el número de cláusulas). Todos los nodos etiquetados por x están conectados con los etiquetados por $\bar{x}$. Use como *gadget* para una cláusula un triángulo cuyos vértices están etiquetados con los literales de la cláusula. No use un nodo en más de una *gadget* para una cláusula.

(ii).- (3.0 pts)

Considere el siguiente problema. Sea una lista de exámenes $E_1, \ldots, E_k$ y un conjunto de estudiantes $S_1, \ldots, S_l$, cada uno tomando un subconjunto dado de exámenes. Se desea programar los exámenes en d días distintos pero de manera que ningún estudiante deba rendir dos exámenes el mismo día. El problema es decidir si dicha programación es factible. Formule el problema como un problema de decisión para un lenguaje L y pruebe que dicho lenguaje es NP-completo.

Indicación: Reduzca desde $3COLOR$.